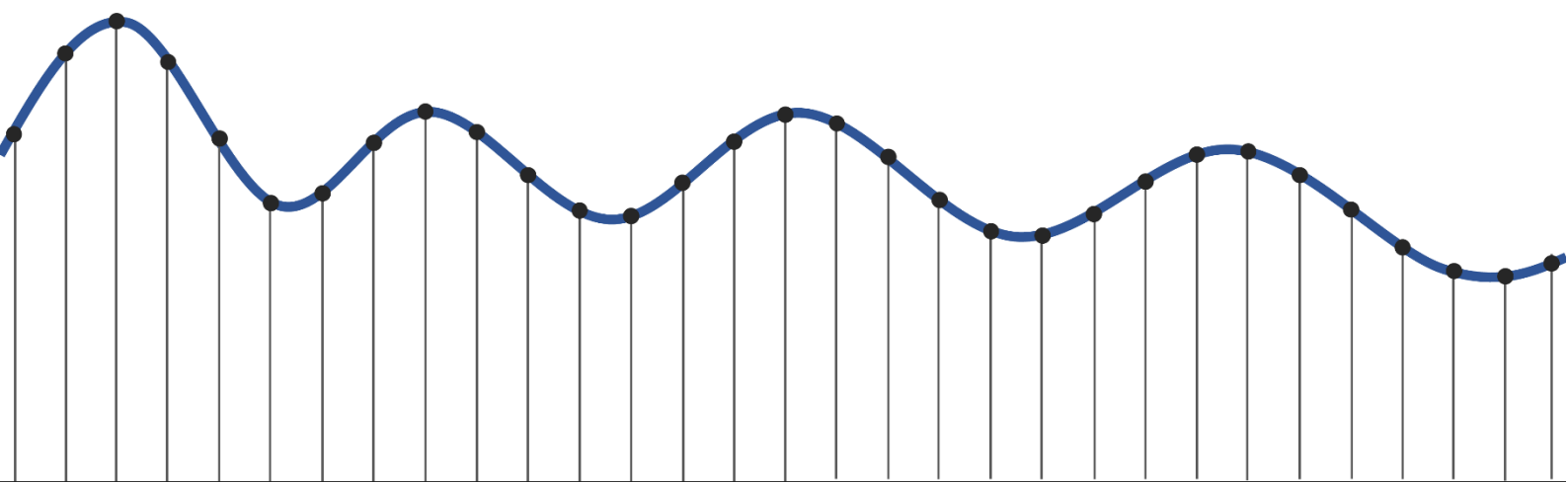




Marija Ivanovska in Vitomir Štruc

Rešene naloge iz analize signalov



Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

Marija Ivanovska in Vitomir Štruc

Rešene naloge iz analize signalov

Prva izdaja

Ljubljana, 2020

Predgovor

Pričujoča zbirka nalog je nastala kot dodatno študijsko gradivo pri predmetu Analiza signalov, ki se izvaja v 2. letniku visokošolskega študija na Fakulteti za elektrotehniko. Naš cilj je bil študentom ponuditi več primerov nalog z detaljnim postopkom reševanja in jim s tem pomagati pri pripravi na laboratorijske vaje in pisni izpit pri predmetu. Zbirka se navezuje na učbenik prof. dr. Franceta Miheliča, Signali, 2014, ter na Signali - Priročnik z zbirko rešenih nalog prof. dr. Franceta Miheliča, prof. dr. Ludvika Gyergyeka in viš. pred. Tomaža Ebenšpangera.

Kazalo

1	Energija in moč signalov	1
1.1	Uvod	1
1.2	Naloge	2
2	Izražanje signalov s temeljnimi funkcijami	5
2.1	Uvod	5
2.1.1	Sprememba območja ortogonalnosti	7
2.2	Naloge	8
3	Frekvenčna analiza periodičnih signalov	22
3.1	Uvod	22
3.2	Naloge	25
4	Avtokorelacija, križna korelacija in konvolucija periodičnih signalov	32
4.1	Uvod	32
4.2	Naloge	34
5	Frekvenčna analiza neperiodičnih signalov	43
5.1	Uvod	43
5.2	Naloge	45
6	Avtokorelacija, križna korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov	56
6.1	Uvod	56
6.2	Naloge	57
7	Prevajanje signalov skozi linearne stacionarne sisteme	76
7.1	Uvod	76
7.2	Naloge	77
8	Diskretni signali	94
8.1	Uvod	94
8.2	Naloge	95
A		101
A.1	Integriranje signalov	101
A.2	Numerično integriranje signalov	103
B		106
B.1	Tabela Fourierjevih transformacij nekaterih funkcij	107

Poglavje 1

Energija in moč signalov

1.1 Uvod

Na področju elektrotehnike ste se do zdaj največkrat srečevali z energijo in močjo električnega vezja, ki ju izračunamo v odvisnosti od napetosti u in toka i . Tako moč $p(t)$ v časovnem trenutku t izračunamo kot $p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = \frac{1}{R} \cdot u^2(t)$, kjer je R upornost vezja. Ko je $R = 1$, dobimo $p(t) = i^2(t) = u^2(t)$. Podobno bomo definirali tudi moč signalov.

Vsak fizikalno realen signal vsebuje neko energijo, ki s časom izzveni. Moč takšnega signala določimo s časovnim normiranjem njegove energije. Naj bo $f(t)$ signal, katerega moč želimo določiti. Signal je v splošnem lahko tudi kompleksen, zato bomo vse enačbe zapisali z uporabo absolutne vrednosti signala $|f(t)|$. Njegova moč v časovnem trenutku t je:

$$p_f(t) = |f(t)|^2$$

Skladno s to enačbo, energijo E_f na končnem časovnem intervalu (t_1, t_2) izračunamo kot:

$$E_f(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

Kadar nas zanima energija signala $f(t)$ preko celotne časovne osi $(-\infty, \infty)$ se poslužimo limite, ki jo izračunamo kot:

$$E_f(t_1, t_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1.2)$$

V tej enačbi je T spremenljivka, ki limitira proti neskončnosti in ne perioda signala $f(t)$! Signal $f(t)$ je namreč lahko tudi neperiodičen. Kadar limita iz enačbe (1.2) obstaja in je končna ($E_f < \infty$) rečemo, da je signal $f(t)$ *energijski*. Energijski signali so torej tisti, ki so časovno omejeni, obenem pa je tudi njihova amplituda omejena. Periodični signali so na primer časovno neomejeni in zato niso energijski.

Povprečno moč signala $f(t)$ na omejenem časovnem intervalu (t_1, t_2) dobimo s časovnim normiranjem energije signala na omenjenem intervalu:

$$P_f(t_1, t_2) = \frac{E_f(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt \quad (1.3)$$

Kadar nas zanima povprečna moč signala $f(t)$ preko celotne časovne osi $(-\infty, \infty)$ računamo limito:

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1.4)$$

Ponovno je T spremenljivka, ki limitira proti neskončnosti in ne perioda signala $f(t)$! Kadar limita iz enačbe (1.4) obstaja in je končna ter pozitivna ($0 < P_f < \infty$) rečemo, da je signal $f(t)$ *močnosten*.

Periodični signali so običajno močnostni. Pri periodičnih signalih je povprečna moč na eni ali na večih periodah nT_0 , $n \in \mathbb{N}$ enaka povprečni moči preko celotne časovne osi $(-\infty, \infty)$:

$$P_f = \frac{1}{T_i} \int_{t_1}^{t_1+T_i} |f(t)|^2 dt, \text{ kjer je } T_i = nT_0, n \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

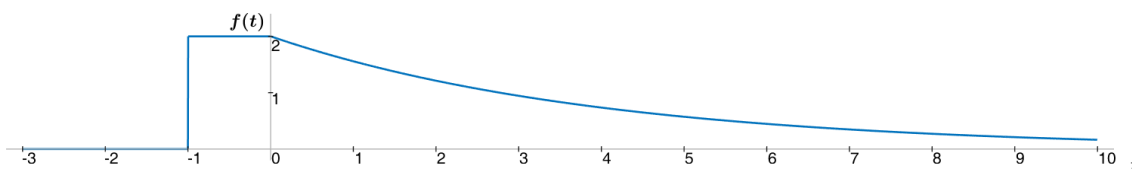
V enačbi (1.5) je torej s T_0 označena perioda periodičnega signala $f(t)$.

1.2 Naloge

1. Dan je signal na Sliki 1.1

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 2, & -1 \leq t < 0 \\ 2e^{-\frac{t}{4}}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Določite ali je signal energijski ali ne!



Slika 1.1: Grafični prikaz signala $f(t)$, definiran pri Nalogi 1 na časovnem intervalu $(-3, 10)$.

Signal je energijski, ko obstaja limita

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$$

in velja $E_f < \infty$. Izračunajmo vrednost enačbe (1.2) za dan signal $f(t)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\int_{-T}^{-1} 0^2 dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{-1}^0 2^2 dt}_{I_2} + \underbrace{\int_0^T (2e^{-\frac{t}{4}})^2 dt}_{I_3} \right)$$

Ker ima signal $f(t)$ različne definicije na treh različnih časovnih intervalih, se integral znotraj limite razdeli na tri integrale. Izračunajmo vrednost vsakega od teh integralov posebej:

$$I_1 = \int_{-T}^{-1} 0^2 dt = 0$$

$$I_2 = \int_{-1}^0 2^2 dt = 4t \Big|_{-1}^0 = 4 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) = 4$$

$$I_3 = \int_0^T (2e^{-\frac{t}{4}})^2 dt^* = -8e^{-\frac{t}{2}} \Big|_0^T = 8 - 8e^{-\frac{T}{2}}$$

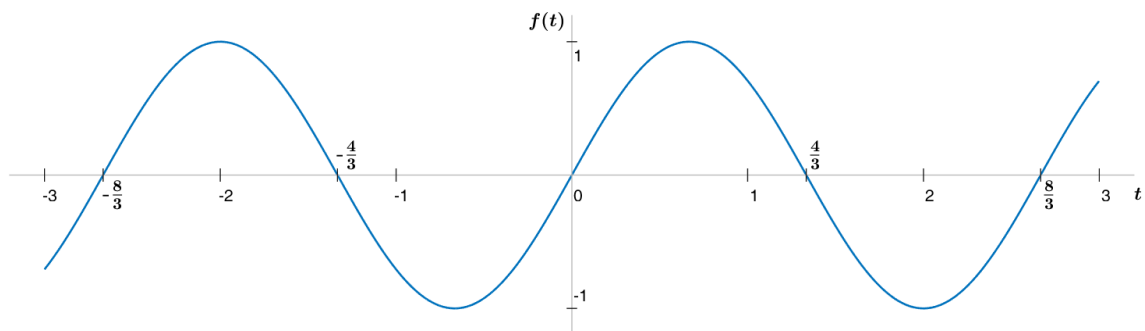
Limita bo sedaj:

$$E_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(0 + 4 + 8 - \underbrace{8e^{-\frac{T}{2}}}_{\rightarrow 0} \right) = 12$$

Limita torej obstaja in je celo pozitivna ($E_f > 0$). Lahko zaključimo, da je dan signal energijski.

2. Dan je periodični zvezni signal $f(t) = \sin(\frac{3\pi}{4}t)$ (Slika 1.2).

- Analitično izračunaj periodo T_0 podanega signala.
- Določi moč signala po splošni definiciji.
- Določi moč signala s pomočjo zveze za periodične signale.



Slika 1.2: Grafični prikaz signala $f(t) = \sin(\frac{3\pi}{4}t)$, na časovnem intervalu $(-3, 3)$.

* $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

- (a) Splošna oblika sinusne funkcije je $\sin(wt)$. V našem primeru je $w = \frac{3\pi}{4}$. Po drugi strani $w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0}$, kjer je T_0 perioda signala. Iz tega sledi:

$$\frac{2\pi}{T_0} = \frac{3\pi}{4} \implies 3\pi \cdot T_0 = 2\pi \cdot 4 \implies T_0 = \frac{8}{3}$$

- (b) Izračunajmo moč signala po splošni definiciji (enačba (1.4)):

$$P_f(t_1, t_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}t\right) dt$$

Najprej bomo izračunali integral:

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}t\right) dt^* &= \int_{-T}^T \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{3\pi}{2}t\right) dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-T}^T dt - \int_{-T}^T \cos \frac{3\pi}{2}t dt^{**} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(t \Big|_{-T}^T - \frac{\sin \frac{3\pi}{2}t}{\frac{3\pi}{2}} \Big|_{-T}^T \right) = \frac{1}{2} \left(T - (-T) - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}T\right)}{\frac{3\pi}{2}} + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}(-T)\right)}{\frac{3\pi}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(2T - 2 \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}T\right)}{\frac{3\pi}{2}} \right) = T - 2 \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}T\right)}{3\pi} \end{aligned}$$

Vrnemo se na izračun limite. Limita je sedaj:

$$\begin{aligned} P_f(t_1, t_2) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}t\right) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(T - 2 \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}T\right)}{3\pi} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{T} \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}T\right)}{3\pi}}_{\rightarrow 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Limita obstaja in je končna ter pozitivna. Lahko zaključimo, da je signal $f(t) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$ močnosten.

- (c) Izračunajmo moč signala s pomočjo zveze za periodične signale (enačba (1.5)). V skladu s formulo integriramo na časovnem intervalu $(t_1, t_1 + T_i)$, kjer si vrednosti t_1 in T_i izberemo sami. Zaradi lažjega računanja si izberemo $t_1 = 0$ in $T_i = 1 \cdot T_0 = \frac{8}{3}$:

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{T_i} \int_{t_1}^{t_1+T_i} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\frac{8}{3}} \int_0^{\frac{8}{3}} \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}t\right) dt = \frac{3}{8} \int_0^{\frac{8}{3}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{3\pi}{2}t\right) dt = \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{8}{3}} dt - \int_0^{\frac{8}{3}} \cos \frac{3\pi}{2}t dt \right) = \frac{3}{16} \left(t \Big|_0^{\frac{8}{3}} - \frac{\sin \frac{3\pi}{2}t}{\frac{3\pi}{2}} \Big|_0^{\frac{8}{3}} \right) = \\ &= \frac{3}{16} \left(\frac{8}{3} - 0 - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{8}{3}\right)}{\frac{3\pi}{2}} + \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} \cdot 0\right)}{\frac{3\pi}{2}}}_{=0} \right) = \frac{3}{16} \left(\frac{8}{3} - \underbrace{\frac{\sin 4\pi}{\frac{3\pi}{2}}}_{=0} \right) = \frac{3}{16} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dobili smo enak rezultat kot pri izračunu moči po splošni definiciji.

* $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

** $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a}$, $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$

Poglavje 2

Izražanje signalov s temeljnimi funkcijami

2.1 Uvod

Signal $f(t)$ lahko izrazimo kot linearno kombinacijo $\tilde{f}(t)$ zaporedja $\{\phi_n(t)\}$ bazičnih funkcij, ki so v splošnem lahko tudi kompleksne:

$$\tilde{f}(t) = C_0\phi_0(t) + C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \dots + C_N\phi_N(t) = \sum_{n=0}^N C_n\phi_n(t)$$

kjer so $\{C_0, C_1, \dots, C_N\}$ med sabo neodvisni koeficienti, ki jih določimo s pomočjo signala $f(t)$ in z izbranimi temeljnimi funkcijami $\{\phi_n(t)\}$.

$$C_n = \frac{1}{K_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \overline{\phi_n(t)} dt \quad (2.1)$$

$$K_n = \int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \overline{\phi_n(t)} dt \quad (2.2)$$

Zaporedje bazičnih funkcij je na intervalu (t_1, t_2) medsebojno ortogonalno (pravokotno), če velja

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_m(t) \overline{\phi_n(t)} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ K_n \geq 0 & m = n \end{cases}$$

Za kriterij kvalitete aproksimacije signala izberemo vrednost srednjega kvadratnega pogoška:

$$\ddot{\varepsilon}^2(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - \tilde{f}(t)) \overline{(f(t) - \tilde{f}(t))} dt$$

od koder sledi:

$$\ddot{\varepsilon}^2(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(t) \bar{f}(t) dt - \sum_{n=0}^N C_n \overline{C_n} K_n \right) \quad (2.3)$$

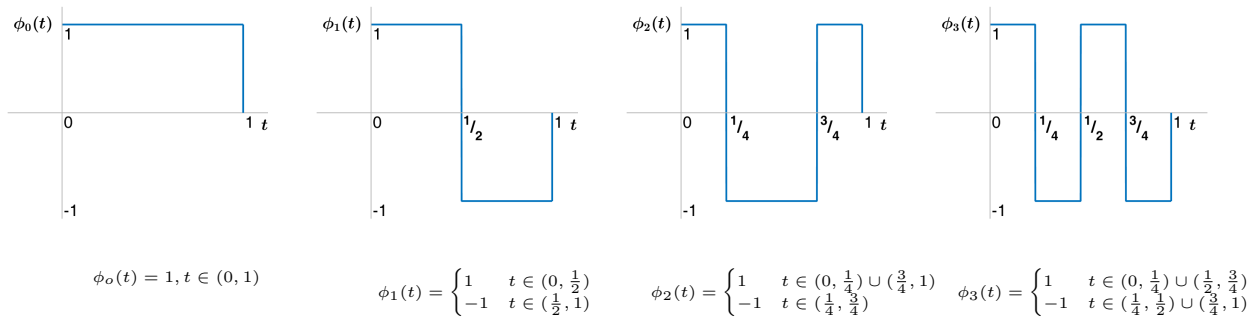
Za realne signale in bazične funkcije se konjugirani del vseh zgoraj navedenih enačb poenostavi: $\overline{\phi_n}(t) = \phi_n(t)$, $\bar{f}(t) = f(t)$, $\bar{\tilde{f}}(t) = \tilde{f}(t)$ in $\overline{C_n} = C_n$.

Walsheve temeljne funkcije so bazične funkcije, sestavljene iz medsebojno ortogonalnih pravokotnih valovnih oblik v končnem časovnem intervalu in imajo le vrednosti -1 in 1. Zaporedje prvih 2^n Walshevih funkcij pridobimo iz $2^n \times 2^n$ Hadamardove matrike $H(n)$:

$$H(0) = [1], H(1) = \begin{bmatrix} H(0) & H(0) \\ H(0) & -H(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$H(2) = \begin{bmatrix} H(1) & H(1) \\ H(1) & -H(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \dots H(n+1) = \begin{bmatrix} H(n) & H(n) \\ H(n) & -H(n) \end{bmatrix}$$

Definicije prvih štirih Walshevih funkcij:

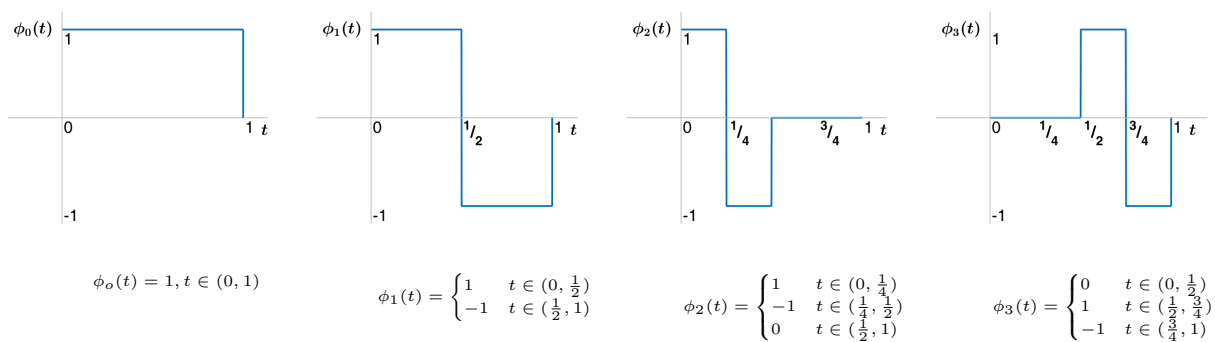


Slika 2.1: Grafični prikaz in zapis prvih štirih Walshevih temeljnih funkcij

Walsheve funkcije so na intervalu $(0, 1)$ ortonormalne ($\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \dots = \mathbf{K}_n = \mathbf{1}$)

Haarove temeljne funkcije dobimo z iterativnim postopkom delitve intervala $(0, 1)$ na 2^n enakih delov, ki pri vsaki delitvi da 2^n novih Haarovih funkcij. Pri tem ima Haarova funkcija na $2^n - 1$ podintervalih vrednost 0, na preostalem podintervalu pa stalno od 0 različno obliko.

Definicije prvih štirih Haarovih funkcij:



Slika 2.2: Grafični prikaz in zapis prvih štirih Haarovih temeljnih funkcij

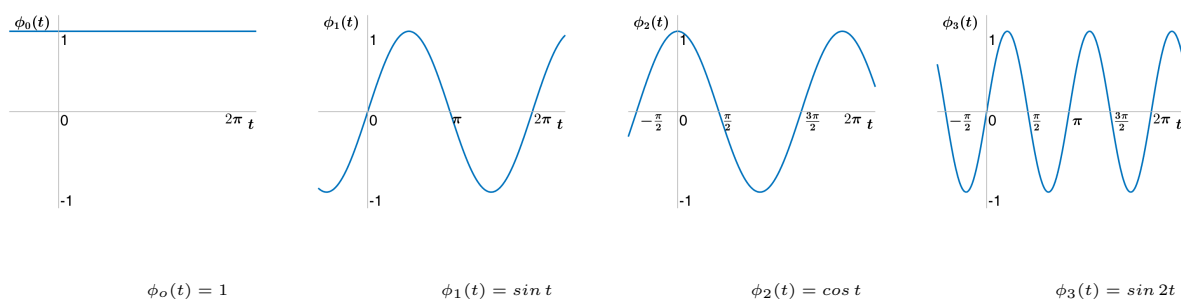
Haarove funkcije niso ortonormalne, so pa ortogonalne na intervalu $(0, 1)$. Njihova energija se manjša, skladno s krajšanjem časovnega intervala, na katerem so različne od 0 $\Rightarrow \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_1 = 1, \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_3 = \frac{1}{2}, \mathbf{K}_4 = \mathbf{K}_5 = \mathbf{K}_6 = \mathbf{K}_7 = \frac{1}{4} \dots$

Trigonometrične temeljne funkcije so zaporedje sinusov in kosinusov

$\{\phi_n\} = \{1, \sin w_0 t, \cos w_0 t, \sin 2w_0 t, \cos 2w_0 t, \sin 3w_0 t, \cos 3w_0 t \dots\}$, kjer je $w_0 = \frac{2\pi}{T}$, medsebojno ortogonalnih na intervalu $(t_1, t_1 + T)$.

Trigonometrične funkcije so še posebej primerne pri izražanju periodičnih signalov, ker so tudi same periodične. Za dano zaporedje $\{\phi_n\}$ je $K_n = \begin{cases} T & n = 0 \\ \frac{T}{2} & n \neq 0 \end{cases}$

Definicije prvih štirih trigonometričnih funkcij za $T = 2\pi$:



Slika 2.3: Grafični prikaz in zapis prvih štirih trigonometričnih temeljnih funkcij s periodo $T = 2\pi$

2.1.1 Sprememba območja ortogonalnosti

Kadar za signal $f(t)$ iščemo približek na časovnem intervalu (t'_1, t'_2) je potrebno zagotoviti, da so tudi izbrane temeljne funkcije ortogonalne na tem intervalu. V kolikor je zaporedje izbranih temeljnih funkcij $\{\phi_n(t)\}$ ortogonalno na časovnem intervalu (t_1, t_2) , se to lahko preslika v zaporedje funkcij $\{\hat{\phi}_n(t)\} = \{\phi_n(at + b)\}$, ki je ortogonalno na časovnem intervalu

(t'_1, t'_2) z uporabo linearne transformacije $t' = at + b$:

$$a = \frac{t_2 - t_1}{t'_2 - t'_1}, \quad b = \frac{t_1 t'_2 - t_2 t'_1}{t'_2 - t'_1} \quad (2.4)$$

V tem primeru je treba določiti tudi nove koeficiente $\hat{K}_n = \frac{K_n}{a}$, saj so ti odvisni od oblike temeljnih funkcij.

Približek $\tilde{f}(t)$ bo tako po linearni transformaciji bazičnih funkcij definiran kot:

$$\tilde{f}(t) = C_0 \hat{\phi}_0(t) + C_1 \hat{\phi}_1(t) + C_2 \hat{\phi}_2(t) + \dots + C_N \hat{\phi}_N(t) = \sum_{n=0}^N C_n \hat{\phi}_n(t)$$

pri čemer so koeficienti $\{C_0, C_1, \dots, C_N\}$ definirani kot:

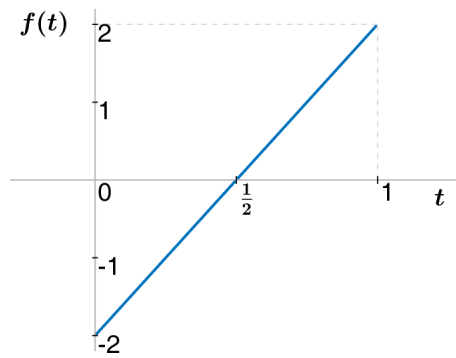
$$C_n = \frac{1}{\hat{K}_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \overline{\hat{\phi}_n(t)} dt \quad (2.5)$$

Vrednost srednjega kvadratnega pogreška izračunamo po formuli:

$$\varepsilon^2(t) = \frac{1}{t'_2 - t'_1} \left(\int_{t'_1}^{t'_2} f(t) \overline{f(t)} dt - \sum_{n=0}^N C_n \overline{C_n} \hat{K}_n \right) \quad (2.6)$$

2.2 Naloge

1. Za signal $f(t) = 4t - 2$ (Slika 2.4) določi približek $\tilde{f}(t)$ na intervalu $(0, 1)$. Približek naj bo sestavljen iz prvih štirih Haarovih temeljnih funkcij tako, da bo srednji kvadratni pogrešek $\varepsilon^2(t)$ najmanjši. Približek nariši in določi vrednost pogreška.



Slika 2.4: Grafični prikaz signala $f(t) = 4t - 2$ na časovnem intervalu $(0, 1)$.

Za aproksimacijo signala $f(t)$ uporabimo Haarove temeljne funkcije, ki so podane na sliki 2.2.

$$K_0 = K_1 = 1, \quad K_2 = K_3 = \frac{1}{2}$$

Najprej izračunamo koeficiente C_n prvih štirih Haarovih funkcij:

$$C_0 = \frac{1}{K_0} \int_0^1 f(t) \phi_0(t) dt = \int_0^1 (4t-2) \cdot 1 dt = 4 \int_0^1 t dt - 2 \int_0^1 dt = 4 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 - 2t \Big|_0^1 = 0$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{K_1} \int_0^1 f(t) \phi_1(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (4t-2) \cdot 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (4t-2) \cdot (-1) dt = \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} t dt - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} dt - 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 dt = 4 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2t \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 4 \frac{t^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + 2t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{K_2} \int_0^1 f(t) \phi_2(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{4}} (4t-2) \cdot 1 dt + 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (4t-2) \cdot (-1) dt + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (4t-2) \cdot 0 dt = \\ &= 8 \int_0^{\frac{1}{4}} t dt - 4 \int_0^{\frac{1}{4}} dt - 8 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t dt + 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dt = 8 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{4}} - 4t \Big|_0^{\frac{1}{4}} - 8 \frac{t^2}{2} \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + 4t \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = -0.5 \end{aligned}$$

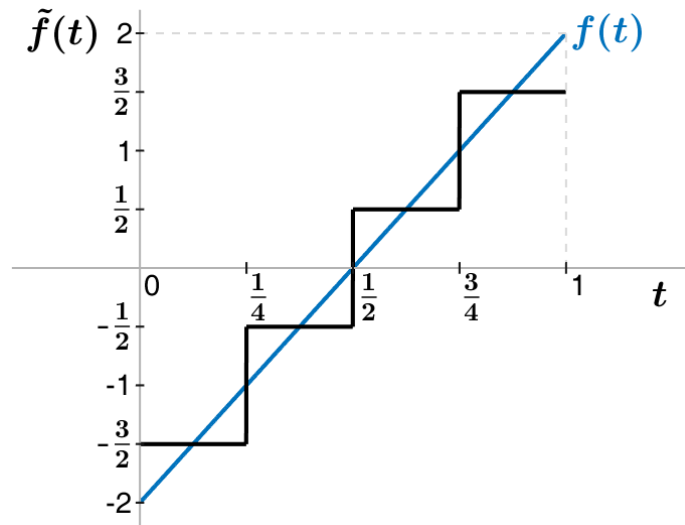
$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{K_3} \int_0^1 f(t) \phi_3(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (4t-2) \cdot 0 dt + 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (4t-2) \cdot 1 dt + 2 \int_{\frac{3}{4}}^1 (4t-2) \cdot (-1) dt = \\ &= 8 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} t dt - 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} dt - 8 \int_{\frac{3}{4}}^1 t dt + 4 \int_{\frac{3}{4}}^1 dt = 8 \frac{t^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} - 4t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} - 8 \frac{t^2}{2} \Big|_{\frac{3}{4}}^1 + 4t \Big|_{\frac{3}{4}}^1 = -0.5 \end{aligned}$$

Na osnovi izračunanih koeficientov zapišemo približek funkcije $f(t)$ z naslednjo enačbo:

$$\tilde{f}(t) = -\phi_1(t) - 0.5\phi_2(t) - 0.5\phi_3(t)$$

Pri temeljnih funkcijah ϕ_2 in ϕ_3 se pojavi sprememba v njihovi vrednosti s časovnim korakom $\frac{1}{4}$, zato pri izrisu poteka približka (Slika 2.5) izračunamo njegovo vrednost na vsaki četrtni intervala. Tako je na primer na intervalu $(0, \frac{1}{4})$ $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = 1$ in $\phi_3 = 0$. Sledi, $\tilde{f}(t) = -1 - 0.5 \cdot 1 - 0.5 \cdot 0 = -1.5$ za $t \in (0, \frac{1}{4})$. Podobno izračunamo $\tilde{f}(t)$ še za ostale podintervale:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} -1 - 0.5 \cdot 1 - 0.5 \cdot 0 = -1.5 & t \in (0, \frac{1}{4}) \\ -1 - 0.5 \cdot (-1) - 0.5 \cdot 0 = -0.5 & t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ -(-1) - 0.5 \cdot 0 - 0.5 \cdot 1 = 0.5 & t \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -(-1) - 0.5 \cdot 0 - 0.5 \cdot (-1) = 1.5 & t \in (\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$



Slika 2.5: Grafični prikaz približka $\tilde{f}(t)$ signala $f(t) = 4t - 2$, ki je sestavljen iz prvih štirih Haarovih temeljnih funkcij na intervalu $(0, 1)$.

Izračunajmo še srednjo kvadratno napako približka $\tilde{f}(t)$ z uporabo enačbe (2.3):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(t) \bar{f}(t) dt - \sum_{n=0}^3 C_n \overline{C_n} K_n \right) = \\
 &= \frac{1}{1-0} \left(\int_0^1 (4t-2)^2 dt - (0^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 1 + (-0.5)^2 \cdot \frac{1}{2} + (-0.5)^2 \cdot \frac{1}{2}) \right) = \\
 &= 16 \int_0^1 t^2 dt - 16 \int_0^1 t dt + 4 \int_0^1 dt - 1.25 = \\
 &= 16 \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 - 8t^2 \Big|_0^1 + 4t \Big|_0^1 - 1.25 = \frac{16}{3} - 8 + 4 - 1.25 \approx 0.083
 \end{aligned}$$

2. Za signal

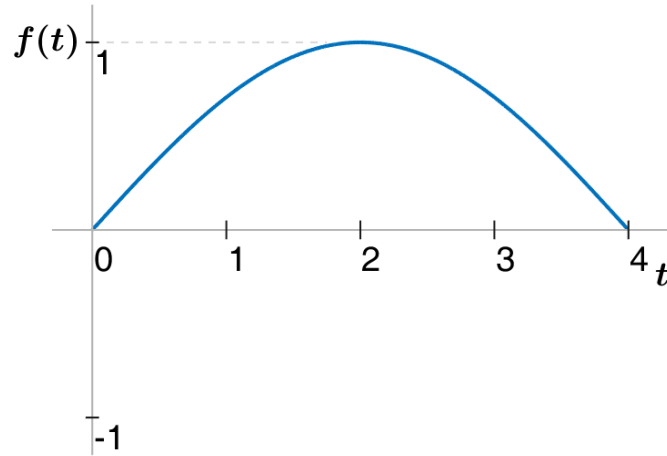
$$f(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{4} t & 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{drugje} \end{cases}$$

ki je prikazan na Sliki 2.6 določite na intervalu $(0, 4)$ približek $\tilde{f}(t)$, sestavljen iz:

- prvih štirih Haarovih temeljnih funkcij,
- prvih štirih Walshevih temeljnih funkcij,
- prvih štirih trigonometričnih temeljnih funkcij.

Približke narišite in določite vrednost pogreškov.

- Haarove funkcije so ortogonalne na intervalu $(0, 1)$, približek $\tilde{f}(t)$ pa iščemo na intervalu $(0, 4)$, zato bomo zaporedje prvih štirih Haarovih funkcij preslikali iz intervala $(0, 1)$ v interval $(0, 4)$ (glej podpoglavje 2.1.1):



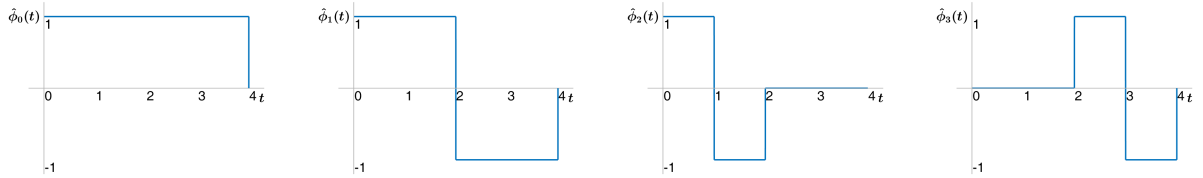
Slika 2.6: Grafični prikaz signala $f(t) = \sin \frac{\pi}{4}t$ na časovnem intervalu $(0, 4)$.

$$a = \frac{t_2 - t_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{1 - 0}{4 - 0} = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{t_1 t'_2 - t_2 t'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{0 \cdot 4 - 1 \cdot 0}{4 - 0} = 0$$

Na sliki 2.7 so prikazane transformirane Haarove temeljne funkcije, ki jih bomo uporabili za aproksimacijo signala $f(t)$. Določimo še koeficiente $\hat{K}_n$:

$$\hat{K}_n = \frac{K_n}{a}, K_0 = K_1 = 1, K_2 = K_3 = \frac{1}{2} \implies \hat{K}_0 = \hat{K}_1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4, \hat{K}_2 = \hat{K}_3 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$



$$\hat{\phi}_0(t) = 1, t \in (0, 4)$$

$$\hat{\phi}_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, 2) \\ -1 & t \in (2, 4) \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_2(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, 1) \\ -1 & t \in (1, 2) \\ 0 & t \in (2, 4) \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_3(t) = \begin{cases} 0 & t \in (0, 2) \\ 1 & t \in (2, 3) \\ -1 & t \in (3, 4) \end{cases}$$

Slika 2.7: Grafični prikaz in zapis prvih štirih Haarovih temeljnih funkcij preslikanih v interval $(0, 4)$.

Izračunamo koeficiente C_n v skladu z enačbo (2.5):

$$C_0 = \frac{1}{\hat{K}_0} \int_0^4 f(t) \hat{\phi}_0(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt \right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_0^4 \right) = \frac{2}{\pi} \approx 0.64$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{\hat{K}_1} \int_0^4 f(t) \hat{\phi}_1(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt + \int_2^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot (-1) dt \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_0^2 + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_2^4 \right) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{1}{\hat{K}_2} \int_0^4 f(t) \hat{\phi}_2(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt + \int_1^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot (-1) dt + \int_2^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 0 dt \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_0^1 + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_1^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2(2 - \sqrt{2})}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{\pi} \approx -0.26
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= \frac{1}{\hat{K}_3} \int_0^4 f(t) \hat{\phi}_3(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 0 dt + \int_2^3 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt + \int_3^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot (-1) dt \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_2^3 + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_3^4 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2(2 - \sqrt{2})}{\pi} \right) = -\frac{2(1 - \sqrt{2})}{\pi} \approx 0.26
\end{aligned}$$

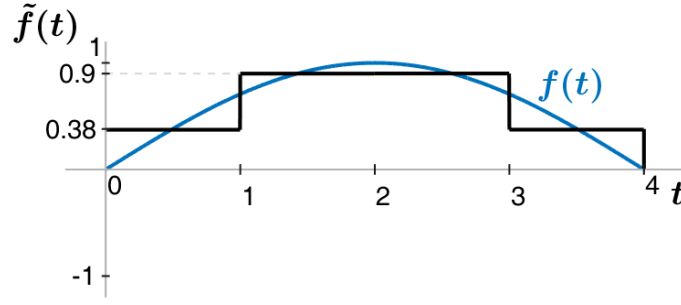
Na osnovi izračunanih koeficientov zapišemo približek funkcije $f(t)$ z naslednjo enačbo:

$$\tilde{f}(t) \approx 0.64\hat{\phi}_0(t) - 0.26\hat{\phi}_2(t) + 0.26\hat{\phi}_3(t)$$

Izračunamo vrednosti aproksimacije $\tilde{f}(t)$ na celotnem časovnem intervalu $(0, 4)$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0.64 \cdot 1 - 0.26 \cdot 1 + 0.26 \cdot 0 = 0.38 & t \in (0, 1) \\ 0.64 \cdot 1 - 0.26 \cdot (-1) + 0.26 \cdot 0 = 0.9 & t \in (1, 2) \\ 0.64 \cdot 1 - 0.26 \cdot 0 + 0.26 \cdot 1 = 0.9 & t \in (2, 3) \\ 0.64 \cdot 1 - 0.26 \cdot 0 + 0.26 \cdot (-1) = 0.38 & t \in (3, 4) \end{cases}$$

Približek je grafično prikazan na Sliki 2.8.



Slika 2.8: Grafični prikaz približka $\tilde{f}(t)$ signala $f(t) = \sin(\frac{\pi}{4}t)$, ki je sestavljen iz prvih štirih Haarovih temeljnih funkcij na intervalu $(0, 4)$.

Izračunajmo še srednjo kvadratno napako približka $\tilde{f}(t)$ z uporabo enačbe (2.6):

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) &= \frac{1}{t'_2 - t'_1} \left(\int_{t'_1}^{t'_2} f(t) \bar{f}(t) dt - \sum_{n=0}^N C_n \overline{C_n} \hat{K}_n \right) = \\ &= \frac{1}{4-0} \left(\int_0^4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt - (0.64^2 \cdot 4 + 0^2 \cdot 4 + (-0.26)^2 \cdot 2 + 0.26^2 \cdot 2) \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} t^2 \Big|_0^4 - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \Big|_0^4 - 1.9088 \right) \approx \frac{1}{4} (2 - 1.9088) \approx 0.0228 \end{aligned}$$

- b) Podobno kot Haarove funkcije, so tudi Walsheve funkcije ortogonalne na intervalu $(0, 1)$, približek $\tilde{f}(t)$ pa iščemo na intervalu $(0, 4)$, zato bomo zaporedje prvih štirih Walshevih funkcij preslikali iz intervala $(0, 1)$ v interval $(0, 4)$. Koeficienta a in b bosta imela enake vrednosti:

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 0$$

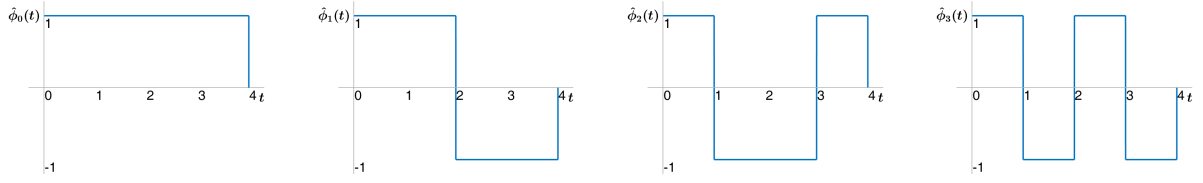
Na sliki 2.9 so prikazane transformirane Walsheve temeljne funkcije, ki jih bomo uporabili za aproksimacijo signala $f(t)$. Določimo še koeficiente $\hat{K}_n$:

$$\hat{K}_n = \frac{K_n}{a}, \quad K_0 = K_1 = K_2 = K_3 = 1 \implies \hat{K}_0 = \hat{K}_1 = \hat{K}_2 = \hat{K}_3 = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Izračunamo koeficiente C_n v skladu z enačbo (2.5):

$$C_0 = \frac{1}{\hat{K}_0} \int_0^4 f(t) \hat{\phi}_0(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt \right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_0^4 \right) = \frac{2}{\pi} \approx 0.64$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\hat{K}_1} \int_0^4 f(t) \hat{\phi}_1(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt + \int_2^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot (-1) dt \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_0^2 + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_2^4 \right) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0 \end{aligned}$$



$$\hat{\phi}_0(t) = 1, t \in (0, 4)$$

$$\hat{\phi}_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, 2) \\ -1 & t \in (2, 4) \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_2(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, 1) \cup (3, 4) \\ -1 & t \in (2, 3) \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_3(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, 1) \cup (2, 3) \\ -1 & t \in (1, 2) \cup (3, 4) \end{cases}$$

Slika 2.9: Grafični prikaz in zapis prvih štirih Walshevih temeljnih funkcij preslikanih v interval $(0, 4)$.

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{\hat{K}_2} \int_0^4 f(t) \hat{\phi}_2(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt + \int_1^3 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot (-1) dt + \int_3^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_0^1 + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_1^3 - \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_3^4 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{2(2 - \sqrt{2})}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2(2 - \sqrt{2})}{\pi} \right) = \\ &= \frac{2(1 - \sqrt{2})}{\pi} \approx -0.26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{\hat{K}_3} \int_0^4 f(t) \hat{\phi}_3(t) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt + \int_1^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot (-1) dt + \int_2^3 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt + \int_3^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot (-1) dt \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_0^1 + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_1^2 - \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_2^3 + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_3^4 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2(2 - \sqrt{2})}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2(2 - \sqrt{2})}{\pi} \right) = 0 \end{aligned}$$

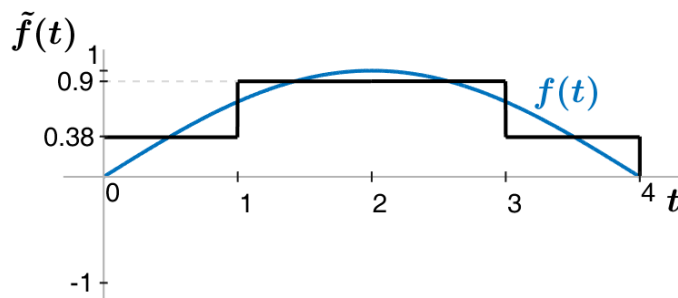
Na osnovi izračunanih koeficientov zapišemo približek funkcije $f(t)$ z naslednjo enačbo:

$$\tilde{f}(t) \approx 0.64\hat{\phi}_0(t) - 0.26\hat{\phi}_2(t)$$

Izračunamo vrednosti aproksimacije $\tilde{f}(t)$ na celotnem časovnem intervalu $(0, 4)$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0.64 \cdot 1 - 0.26 \cdot 1 = 0.38 & t \in (0, 1) \\ 0.64 \cdot 1 - 0.26 \cdot (-1) = 0.9 & t \in (1, 2) \\ 0.64 \cdot 1 - 0.26 \cdot (-1) = 0.9 & t \in (2, 3) \\ 0.64 \cdot 1 - 0.26 \cdot 1 = 0.38 & t \in (3, 4) \end{cases}$$

Približek je grafično prikazan na Sliki 2.10.



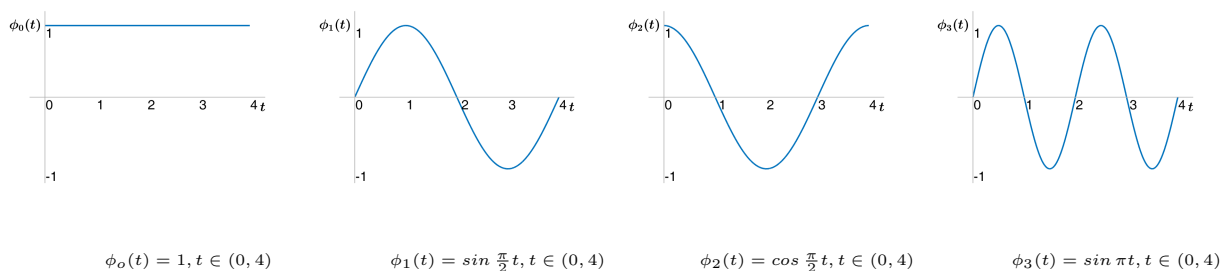
Slika 2.10: Grafični prikaz približka $\tilde{f}(t)$ signala $f(t) = \sin(\frac{\pi}{4}t)$, ki je sestavljen iz prvih štirih Walshevih temeljnih funkcij na intervalu $(0, 4)$.

Izračunajmo še srednjo kvadratno napako približka $\tilde{f}(t)$ z uporabo enačbe (2.6):

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2(t) &= \frac{1}{t'_2 - t'_1} \left(\int_{t'_1}^{t'_2} f(t) \bar{f}(t) dt - \sum_{n=0}^N C_n \overline{C_n} \hat{K}_n \right) = \\ &= \frac{1}{4 - 0} \left(\int_0^4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt - (0.64^2 \cdot 4 + 0^2 \cdot 4 + (-0.26)^2 \cdot 4 + 0^2 \cdot 4) \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}t \Big|_0^4 - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \Big|_0^4 - 1.9088 \right) \approx \frac{1}{4} (2 - 1.9088) \approx 0.0228 \end{aligned}$$

- c) Pri izražanju signala $f(t)$ s pomočjo trigonometričnih funkcij potrebujemo zaporedje sinusov in kosinusov, ki so medsebojno ortogonalni na časovnem intervalu $(0, 4)$. Potrebujemo torej temeljne funkcije s periodo $T = 4$ (Slika 2.11). Njihovi koeficienti K_n so:

$$K_n = \begin{cases} T & n = 0 \\ \frac{T}{2} & n \neq 0 \end{cases} \implies K_0 = 4, K_1 = K_2 = K_3 = 2$$



Slika 2.11: Grafični prikaz in zapis prvih štirih trigonometričnih temeljnih funkcij s periodo $T = 4$.

Izračunamo koeficiente C_n v skladu z enačbo (3.7):

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{K_0} \int_0^4 f(t) \phi_0(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot 1 dt \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_0^4 \right) = \frac{2}{\pi} \approx 0.64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{K_1} \int_0^4 f(t) \phi_1(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_0^4 - \frac{2}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \Big|_0^4 \right) = 0 \end{aligned}$$

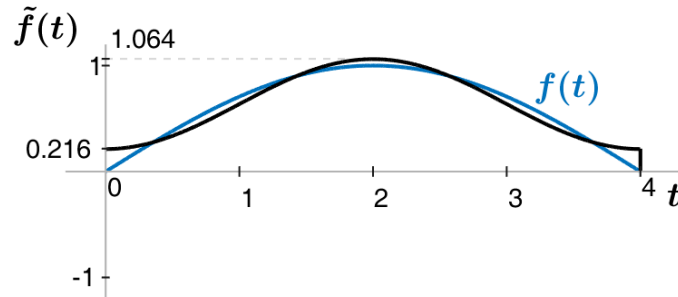
$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{K_2} \int_0^4 f(t) \phi_2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_0^4 - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \Big|_0^4 \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{8}{3\pi} \right) \approx -0.424 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{K_3} \int_0^4 f(t) \phi_3(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot \sin(\pi t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \Big|_0^4 - \frac{2}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi}{4}t\right) \Big|_0^4 \right) = 0 \end{aligned}$$

Na osnovi izračunanih koeficientov zapišemo približek funkcije $f(t)$ z naslednjo enačbo:

$$\tilde{f}(t) \approx 0.64\phi_0(t) - 0.424\phi_2(t)$$

Približek je grafično prikazan na Sliki 2.12.



Slika 2.12: Grafični prikaz približka $\tilde{f}(t)$ signala $f(t) = \sin(\frac{\pi}{4}t)$ na intervalu $(0, 4)$, ki je sestavljen iz prvih štirih trigonometričnih temeljnih funkcij s periodo $T = 4$.

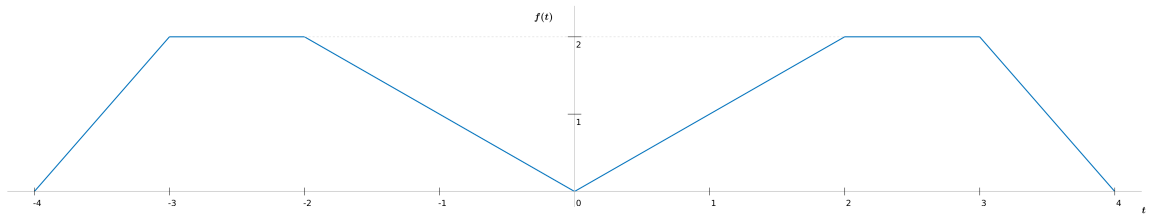
Izračunajmo še srednjo kvadratno napako približka $\tilde{f}(t)$ z uporabo enačbe (2.3):

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(t) \bar{f}(t) dt - \sum_{n=0}^N C_n \overline{C_n} K_n \right) = \\ &= \frac{1}{4-0} \left(\int_0^4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt - (0.64^2 \cdot 4 + 0^2 \cdot 2 + (-0.424)^2 \cdot 2 + 0^2 \cdot 2) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} t \Big|_0^4 - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \Big|_0^4 - 1.998 \right) = \frac{1}{4} (2 - 1.998) \approx 0.0005\end{aligned}$$

3. Za signal

$$f(t) = \begin{cases} 2t + 8 & t \in (-4, -3) \\ 2 & t \in (-3, -2) \\ -t & t \in (-2, 0) \\ t & t \in (0, 2) \\ 2 & t \in (2, 3) \\ -2t + 8 & t \in (3, 4) \\ 0 & \text{drugje} \end{cases}$$

ki je prikazan na Sliki 2.13 določite na intervalu $(-4, 4)$ približek $\tilde{f}(t)$, sestavljen iz prvih štirih Haarovih temeljnih funkcij. Kakšna je razlika v napaki, če signal aproksimiramo s prvimi tremi Haarovimi temeljnimi funkcijami?



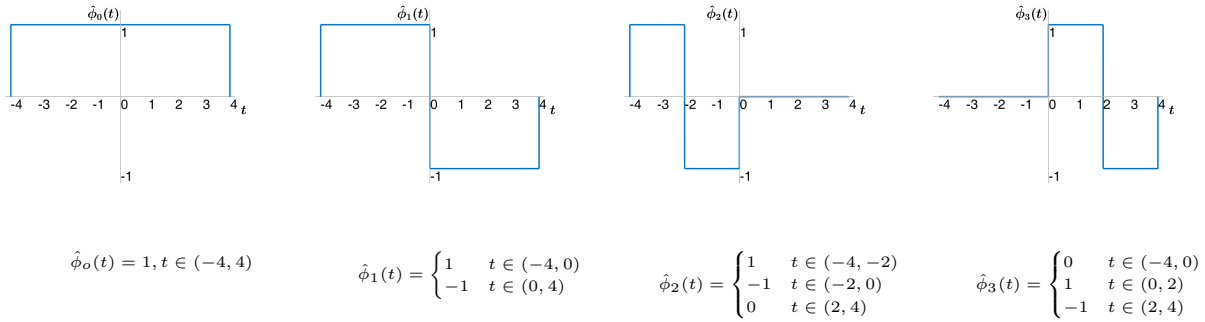
Slika 2.13: Grafični prikaz signala $f(t)$ na časovnem intervalu $(-4, 4)$.

Najprej preslikamo zaporedje prvih štirih Haarovih temeljnih funkcij iz intervala $(0, 1)$ v interval $(-4, 4)$:

$$\begin{aligned}a &= \frac{t_2 - t_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{1 - 0}{4 - (-4)} = \frac{1}{8} \\ b &= \frac{t_1 t'_2 - t_2 t'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{0 \cdot 4 - 1 \cdot (-4)}{4 - (-4)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Na sliki 2.14 so prikazane transformirane Haarove temeljne funkcije, ki jih bomo uporabili za aproksimacijo signala $f(t)$. Določimo še koeficiente $\hat{K}_n$:

$$\hat{K}_n = \frac{K_n}{a}, K_0 = K_1 = 1, K_2 = K_3 = \frac{1}{2} \implies \hat{K}_0 = \hat{K}_1 = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8, \hat{K}_2 = \hat{K}_3 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 4$$



Slika 2.14: Grafični prikaz in zapis prvih štirih Haarovih temeljnih funkcij preslikanih v interval $(-4, 4)$.

Izračunajmo koeficiente C_n v skladu z enačbo (2.5):

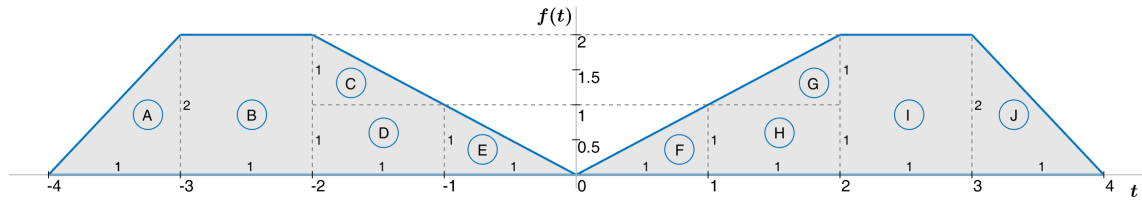
$$C_0 = \frac{1}{8} \left(\int_{-4}^{-3} (2t+8) \cdot 1 \, dt + \int_{-3}^{-2} 2 \cdot 1 \, dt + \int_{-2}^0 (-t) \cdot 1 \, dt + \int_0^2 t \cdot 1 \, dt + \right. \\ \left. + \int_2^3 2 \cdot 1 \, dt + \int_3^4 (-2t+8) \cdot 1 \, dt \right) = \frac{10}{8} = 1.25$$

$$C_1 = \frac{1}{8} \left(\int_{-4}^{-3} (2t+8) \cdot 1 \, dt + \int_{-3}^{-2} 2 \cdot 1 \, dt + \int_{-2}^0 (-t) \cdot 1 \, dt + \int_0^2 t \cdot (-1) \, dt + \right. \\ \left. + \int_2^3 2 \cdot (-1) \, dt + \int_3^4 (-2t+8) \cdot (-1) \, dt \right) = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \left(\int_{-4}^{-3} (2t+8) \cdot 1 \, dt + \int_{-3}^{-2} 2 \cdot 1 \, dt + \int_{-2}^0 (-t) \cdot (-1) \, dt + \int_0^2 t \cdot 0 \, dt + \right. \\ \left. + \int_2^3 2 \cdot 0 \, dt + \int_3^4 (-2t+8) \cdot 0 \, dt \right) = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$C_3 = \frac{1}{4} \left(\int_{-4}^{-3} (2t+8) \cdot 0 \, dt + \int_{-3}^{-2} 2 \cdot 0 \, dt + \int_{-2}^0 (-t) \cdot 0 \, dt + \int_0^2 t \cdot 1 \, dt + \right. \\ \left. + \int_2^3 2 \cdot (-1) \, dt + \int_3^4 (-2t+8) \cdot (-1) \, dt \right) = -\frac{1}{4} = -0.25$$

Pri signalih, ki so definirani z linearnimi funkcijami, lahko izračunamo vrednosti C_n z enostavnim računanjem ploščine pod krivuljo, namesto s klasičnim integriranjem. V tem primeru se problem prevede na seštevanje ploščin ustreznih pravokotnikov in trikotnikov (Slika 2.15):



Slika 2.15: Grafični prikaz plosčin pravokotnikov in trikotnikov, definirani s krivuljo signala $f(t)$.

$$A = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1, B = 1 \cdot 2 = 2, C = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0.5, D = 1 \cdot 1 = 1, E = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0.5,$$

$$F = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0.5, H = 1 \cdot 1 = 1, G = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0.5, I = 1 \cdot 2 = 2, J = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{8} \left(\int_{-4}^{-3} (2t+8) \cdot 1 \, dt + \int_{-3}^{-2} 2 \cdot 1 \, dt + \int_{-2}^0 (-t) \cdot 1 \, dt + \int_0^2 t \cdot 1 \, dt + \int_2^3 2 \cdot 1 \, dt + \int_3^4 (-2t+8) \cdot 1 \, dt \right) = \\ &= \frac{1}{8} (A \cdot 1 + B \cdot 1 + (C + D + E) \cdot 1 + (F + G + H) \cdot 1 + I \cdot 1 + J \cdot 1) = \frac{10}{8} = 1.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{8} \left(\int_{-4}^{-3} (2t+8) \cdot 1 \, dt + \int_{-3}^{-2} 2 \cdot 1 \, dt + \int_{-2}^0 (-t) \cdot 1 \, dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^2 t \cdot (-1) \, dt + \int_2^3 2 \cdot (-1) \, dt + \int_3^4 (-2t+8) \cdot (-1) \, dt \right) = \\ &= \frac{1}{8} (A \cdot 1 + B \cdot 1 + (C + D + E) \cdot 1 + (F + G + H) \cdot (-1) + I \cdot (-1) + J \cdot (-1)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{4} \left(\int_{-4}^{-3} (2t+8) \cdot 1 \, dt + \int_{-3}^{-2} 2 \cdot 1 \, dt + \int_{-2}^0 (-t) \cdot (-1) \, dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^2 t \cdot 0 \, dt + \int_2^3 2 \cdot 0 \, dt + \int_3^4 (-2t+8) \cdot 0 \, dt \right) = \\ &= \frac{1}{4} (A \cdot 1 + B \cdot 1 + (C + D + E) \cdot (-1) + (F + G + H) \cdot 0 + I \cdot 0 + J \cdot 0) = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{4} \left(\int_{-4}^{-3} (2t+8) \cdot 0 \, dt + \int_{-3}^{-2} 2 \cdot 0 \, dt + \int_{-2}^0 (-t) \cdot 0 \, dt + \int_0^2 t \cdot 1 \, dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_2^3 2 \cdot (-1) \, dt + \int_3^4 (-2t+8) \cdot (-1) \, dt \right) = \\ &= \frac{1}{4} (A \cdot 0 + B \cdot 0 + (C + D + E) \cdot 0 + (F + G + H) \cdot 1 + I \cdot (-1) + J \cdot (-1)) = -\frac{1}{4} = -0.25 \end{aligned}$$

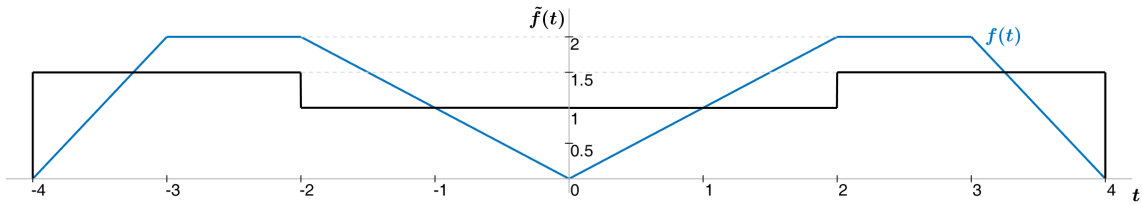
Na osnovi izračunanih koeficientov zapišemo približek funkcije $f(t)$ z naslednjo enačbo:

$$\tilde{f}(t) = 1.25\hat{\phi}_0(t) + 0.25\hat{\phi}_2(t) - 0.25\hat{\phi}_3(t)$$

Izračunamo vrednosti aproksimacije $\tilde{f}(t)$ na celotnem časovnem intervalu $(-4, 4)$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 1.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 1 - 0.25 \cdot 0 = 1.5 & t \in (-4, -2) \\ 1.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot (-1) - 0.25 \cdot 0 = 1 & t \in (-2, 0) \\ 1.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 0 - 0.25 \cdot 1 = 1 & t \in (0, 2) \\ 1.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 0 - 0.25 \cdot (-1) = 1.5 & t \in (2, 4) \end{cases}$$

Približek je grafično prikazan na Sliki 2.16.



Slika 2.16: Grafični prikaz približka $\tilde{f}(t)$ signala $f(t)$, ki je sestavljen iz prvih štirih Haarovih temeljnih funkcij na intervalu $(-4, 4)$.

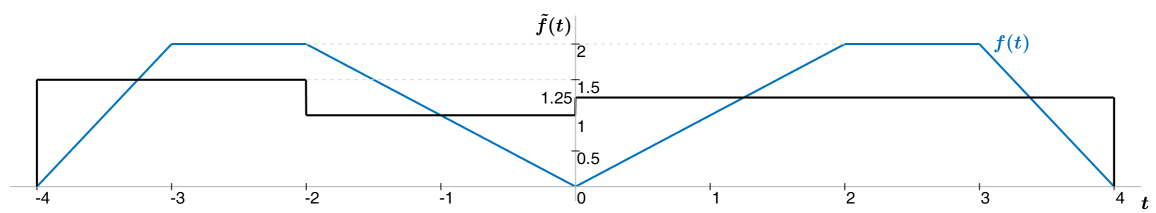
Izračunajmo še srednjo kvadratno napako približka $\tilde{f}(t)$ z uporabo enačbe (2.6):

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}^2(t) &= \frac{1}{t'_2 - t'_1} \left(\int_{t'_1}^{t'_2} f(t) \bar{f}(t) dt - \sum_{n=0}^3 C_n \overline{C_n} \hat{K}_n \right) = \\ &= \frac{1}{4 - (-4)} \left(\int_{-4}^{-3} (2t + 8)^2 dt + \int_{-3}^{-2} 2^2 dt + \int_{-2}^0 (-t)^2 dt + \int_0^2 t^2 dt + \int_2^3 2^2 dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_3^4 (-2t + 8)^2 dt - (1.25^2 \cdot 8 + 0^2 \cdot 8 + 0.25^2 \cdot 4 + (-0.25)^2 \cdot 4) \right) = \frac{1}{8} (16 - 13) = \frac{3}{8} \approx 0.375 \end{aligned}$$

Če signal aproksimiramo le s prvimi tremi Haarovimi temeljnimi funkcijami, bo imela takšna aproksimacija večje odstopanje od danega signala $f(t)$ (Slika 2.17).

Posledično bo tudi srednja kvadratna napaka približka $\tilde{f}(t)$ večja:

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}^2(t) &= \frac{1}{t'_2 - t'_1} \left(\int_{t'_1}^{t'_2} f(t) \bar{f}(t) dt - \sum_{n=0}^2 C_n \overline{C_n} \hat{K}_n \right) = \\ &= \frac{1}{4 - (-4)} \left(\int_{-4}^{-3} (2t + 8)^2 dt + \int_{-3}^{-2} 2^2 dt + \int_{-2}^0 (-t)^2 dt + \int_0^2 t^2 dt + \int_2^3 2^2 dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_3^4 (-2t + 8)^2 dt - (1.25^2 \cdot 8 + 0^2 \cdot 8 + 0.25^2 \cdot 4) \right) = \frac{1}{8} (16 - 12.75) = \frac{3}{8} \approx 0.406 \end{aligned}$$



Slika 2.17: Grafični prikaz približka $\tilde{f}(t)$ signala $f(t)$, ki je sestavljen iz prvih treh Haarovih temeljnih funkcij na intervalu $(-4, 4)$.

Poglavje 3

Frekvenčna analiza periodičnih signalov

3.1 Uvod

Kompleksna Fourierjeva vrsta

Periodični signal $f(t)$ s periodo T_0 lahko izrazimo kot linearno kombinacijo $\tilde{f}(t)$ kompleksnega trigonometričnega zaporedja $\{\phi_n(t)\}$ bazičnih funkcij, oblike $\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$, kjer je $n \in \mathbb{Z}$. Z izbiro ustrezne osnovne frekvence $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ zagotovimo ortogonalnost tega zaporedja na časovnem intervalu dolžine ene periode T_0 . Približek signala $\tilde{f}(t)$ na celotni časovni osi bo:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \phi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t} \quad (3.1)$$

kjer smo koeficiente C_n označili z oznako $F(n)$. Enačba (3.1) predstavlja *kompleksno Fourierjevo vrsto* signala $f(t)$. Koeficiente $F(n)$ izračunamo na podoben način kot koeficiente C_n pri temeljnih funkcijah na omejenem časovnem intervalu:

$$F(n) = \frac{1}{K_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \overline{\phi_n(t)} dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \overline{e^{jn\omega_0 t}} dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} K_n &= \int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \overline{\phi_n(t)} dt = \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jn\omega_0 t} \cdot \overline{e^{jn\omega_0 t}} dt = \int_{t_1}^{t_1+T_0} \underbrace{e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t}}_{=1} dt = \\ &= t \Big|_{t_1}^{t_1+T_0} = t_1 + T_0 - t_1 = T_0 \end{aligned}$$

Ker je $e^{\pm jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t \pm j \sin n\omega_0 t$, si lahko zapis periodičnega signala $f(t)$ s Fourierjevo vrsto interpretiramo kot predstavitev signala z neskončno vsoto sinusnih nihanj s frekvencami $n\omega_0$. V kolikšni meri je posamezno sinusno nihanje zastopano v signalu je odvisno od vrednosti ustreznega koeficienta $F(n)$. Posledično koeficiente $F(n)$ imenujemo

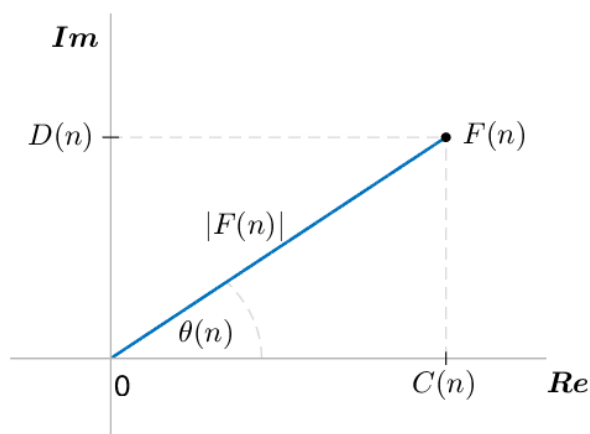
kompleksni spekter periodičnega signala in jih lahko razdelimo na realni $C(n)$ in imaginarni del spektra $D(n)$:

$$F(n) = C(n) + jD(n) \quad (3.3)$$

Enačba (3.4) predstavlja zapis koeficientov $F(n)$ s polarnimi koordinatami, Slika 3.1 pa njegov grafični prikaz v kompleksni ravnini.

$$F_n = |F(n)|e^{j\theta(n)} \quad (3.4)$$

kjer je $|F(n)|$ amplitudni spekter, $\theta(n)$ pa fazni spekter periodičnega signala $f(t)$.



Slika 3.1: Grafični prikaz kompleksnega spektra $F(n) = C(n) + jD(n)$ v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$, kjer je $C(n)$ realni $D(n)$ pa imaginarni del spektra. $|F(n)|$ predstavlja amplitudni spekter, $\theta(n)$ pa fazni spekter periodičnega signala $f(t)$.

S pomočjo Slike 3.1 zapišemo še zveze med polarnim (enačba (3.4)) in kartezičnim zapisom (enačba (3.3)) kompleksnega spektra:

$$|F_n| = \left| \sqrt{C^2(n) + D^2(n)} \right| = \left| \sqrt{F(n) \cdot \overline{F(n)}} \right| \quad (3.5)$$

$$\theta(n) = \begin{cases} \arctg \frac{D(n)}{C(n)}, & C(n) > 0 \\ \pm\pi + \arctg \frac{D(n)}{C(n)}, & C(n) < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & C(n) = 0 \wedge D(n) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & C(n) = 0 \wedge D(n) < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$C(n) = |F_n| \cdot \cos \theta(n) \quad (3.7)$$

$$D(n) = |F_n| \cdot \sin \theta(n) \quad (3.8)$$

Kompleksna Fourierjeva vrsta se lahko uporabi tako za aproksimacijo realnih, kot tudi za aproksimacijo kompleksnih signalov. V nadaljevanju bomo izpeljali realno Fourierjevo vrsto, ki se omejuje le na realne signale.

Realna Fourierjeva vrsta

Izraz za kompleksno Fourierjevo vrsto (enačba (3.1)) lahko razširimo z uporabo Eulerjeve formule ($e^{jnw_0t} = \cos nw_0t + j \sin nw_0t$), in jo zapišemo le s pomočjo pozitivnih n :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)e^{jnw_0t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\cos nw_0t + jF(n)\sin nw_0t = \\ &= F(0)^* + \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\cos nw_0t + jF(n)\sin nw_0t + F(-n)\cos(-nw_0t) + jF(-n)\sin(-nw_0t) = \\ &= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (F(n) + F(-n)) \cdot \cos nw_0t + j(F(n) - F(-n)) \cdot \sin nw_0t\end{aligned}$$

Izrazimo $F(-n)$ s pomočjo enačbe (3.2):

$$\begin{aligned}F(-n) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)e^{jnw_0t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)e^{-jn w_0 t} dt = \\ &= \overline{\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t)e^{-jn w_0 t} dt} = \overline{F(n)}\end{aligned}$$

Prejšnja enačba se sedaj spremeni v

$$\tilde{f}(t) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (F(n) + \overline{F(n)}) \cdot \cos nw_0t + j(F(n) - \overline{F(n)}) \cdot \sin nw_0t$$

kjer sta $a_n = (F(n) + \overline{F(n)})$ in $b_n = j(F(n) - \overline{F(n)})$ realna**. Z vpeljavo oznak a_n , b_n in $a_0 = 2F(0)$ dobimo *realno Fourierjevo vrsto*:

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nw_0t + b_n \sin nw_0t \quad (3.9)$$

Z uporabo enačbe (3.2) izpeljemo izraze za a_0 , a_n in b_n :

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos(nw_0t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin(nw_0t) dt\end{aligned} \quad (3.10)$$

Izrazimo amplitudni $|F(n)|$ in fazni spekter $\theta(n)$ realnega periodičnega signala $f(t)$:

$$|F_n| = \frac{1}{2} \left| \sqrt{a_n^2(n) + b_n^2(n)} \right| \quad (3.11)$$

* $F(0) \underbrace{\cos(0 \cdot w_0t)}_{=1} + jF(0) \underbrace{\sin(0 \cdot w_0t)}_{=0} = F(0)$

** $a_n = C(n) \pm jD(n) + C(n) \mp jD(n) = 2C(n)$, $b_n = j(C(n) \pm jD(n) - (C(n) \mp jD(n))) = -2D(n)$

$$\theta(n) = \begin{cases} -\arctg \frac{b_n}{a_n}, & a_n > 0 \\ \pm\pi - \arctg \frac{b_n}{a_n}, & a_n < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a_n = 0 \wedge b_n > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a_n = 0 \wedge b_n < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Naštejemo še lastnosti kompleksnega spektra, ki izhajajo iz zveze $F(-n) = \overline{F(n)}$:

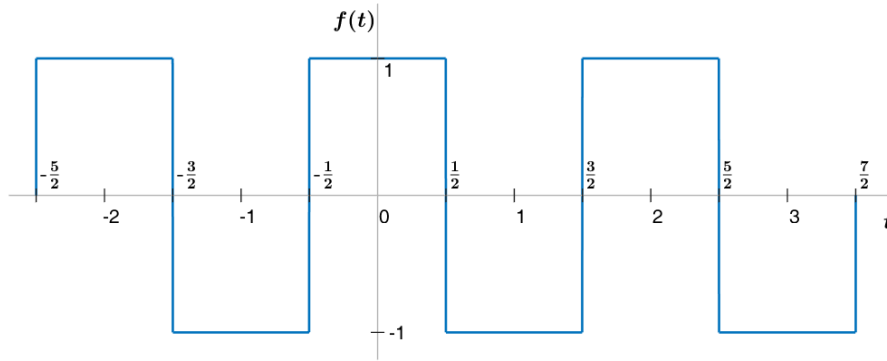
- $C(n) = C(-n) \implies$ realni spekter $C(n)$ je soda funkcija,
- $D(n) = -D(-n) \implies$ kompleksni spekter $D(n)$ je liha funkcija,
- $|F(n)| = |F(-n)| \implies$ amplitudni spekter $|F(n)|$ je soda funkcija,
- $\theta(n) = -\theta(-n) \implies$ fazni spekter $\theta(n)$ je liha funkcija.

3.2 Naloge

1. Za podani periodični signal

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2} \\ f(t + mT_0), & \forall t \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ki je prikazan na Sliki 3.2 določi kompleksno in realno Fourierjevo vrsto, amplitudni spekter $|F(n)|$ in fazni spekter $\theta(n)$.



Slika 3.2: Grafični prikaz signala $f(t)$ na časovnem intervalu $(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$.

Perioda danega signala $f(t)$ je $T_0 = 2$. Iz tega sledi, da je osnovna harmonska frekvenca $w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$. Najprej bomo s pomočjo enačbe (3.2) izračunali kompleksni spekter $F(n)$ signala $f(t)$. Izberemo $t_1 = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
F(n) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(t) e^{-jn\pi t} dt = \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-jn\pi t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-1) \cdot e^{-jn\pi t} dt \right) = * = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\pi t} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{-jn\pi} e^{-jn\pi t} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-jn\pi} \left((e^{-jn\frac{\pi}{2}} - e^{jn\frac{\pi}{2}}) - (e^{-jn\frac{3\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}) \right) = ** \\
&= -\frac{1}{2jn\pi} \left((\cancel{\cos n\frac{\pi}{2}} - j \sin n\frac{\pi}{2} - \cancel{\cos n\frac{\pi}{2}} - j \sin n\frac{\pi}{2}) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\underbrace{\cos n\frac{3\pi}{2}}_{=\cos n\frac{\pi}{2}} - j \underbrace{\sin n\frac{3\pi}{2}}_{=-\sin n\frac{\pi}{2}} - (\cos n\frac{\pi}{2} - j \sin n\frac{\pi}{2}) \right) \right) = \\
&= -\frac{1}{2jn\pi} \left((-2j \sin n\frac{\pi}{2} - (\cancel{\cos n\frac{\pi}{2}} + j \sin n\frac{\pi}{2} - \cancel{\cos n\frac{\pi}{2}} + j \sin n\frac{\pi}{2})) \right) = \\
&= -\frac{1}{2jn\pi} (-4j \sin n\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Kompleksna Fourierjeva vrsta signala $f(t)$ je tako

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2} \cdot e^{jn\pi t}$$

Opazimo, da ima kompleksni spekter $F(n)$ samo realni del različen od 0. To je namreč lastnost kompleksnih spektrov sodih signalov ($f(t) = f(-t)$), med katerimi je tudi naš signal. $F(n)$ bi lahko izračunali z uporabo enačbe za sode signale $f(t)$:

$$F(n) = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (3.13)$$

Podobno, je imaginarni del kompleksnega spektra lihih signalov različen od 0, medtem ko je realni del $C(n)$ enak 0. Zapišemo še posebno enačbo za izračun kompleksnega spektra $F(n)$ lihih signalov:

$$F(n) = -j \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (3.14)$$

V nadaljevanju poiščemo še realno Fourierjevo vrsto signala $f(t)$. Najprej izračunamo koeficiente a_0 , a_n in b_n :

$$* \int e^{\pm ax} dx = \frac{1}{\pm a} e^{\pm ax}$$

$$** e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$$

$$^\dagger \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \Rightarrow \cos n\frac{3\pi}{2} = \cos(n2\pi - n\frac{\pi}{2}) = \underbrace{\cos n2\pi}_{=1} \cdot \cos n\frac{\pi}{2} + \underbrace{\sin n2\pi}_{=0} \cdot \sin n\frac{\pi}{2} = \cos n\frac{\pi}{2}$$

$$^\dagger \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \Rightarrow \sin n\frac{3\pi}{2} = \sin(n2\pi - n\frac{\pi}{2}) = \underbrace{\sin n2\pi}_{=0} \cdot \cos n\frac{\pi}{2} + \underbrace{\cos n2\pi}_{=1} \cdot \sin n\frac{\pi}{2} = -\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{2}{2} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-1) dt \right) = t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos(nw_0 t) dt = \frac{2}{2} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \cos(n\pi t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-1) \cdot \cos(n\pi t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{n\pi} \left(\sin n\frac{\pi}{2} - \sin n\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin n\frac{3\pi}{2} - \sin n\frac{\pi}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(\sin n\frac{\pi}{2} + \sin n\frac{\pi}{2} + \sin n\frac{\pi}{2} + \sin n\frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin(nw_0 t) dt = \frac{2}{2} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \sin(n\pi t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-1) \cdot \sin(n\pi t) dt \right) = \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \right) = -\frac{1}{n\pi} \left(\cos n\frac{\pi}{2} - \cos n\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(\cos n\frac{3\pi}{2} - \cos n\frac{\pi}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(\cos n\frac{\pi}{2} - \cos n\frac{\pi}{2} - \cos n\frac{\pi}{2} + \cos n\frac{\pi}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Realna Fourierjeva vrsta signala $f(t)$ je:

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nw_0 t + b_n \sin nw_0 t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2} \cdot \cos n\pi t$$

Podobno kot pri izračunu kompleksne Fourierjeve vrste opazimo, da so koeficienti sodih signalov a_n različni od 0, medtem ko so koeficienti b_n enaki nič. Pri lihih signalih ($f(-t) = -f(t)$) je ravno obratno ($a_n = 0$, $b_n \neq 0$).

Sedaj, ko smo določili kompleksno in realno Fourierjevo vrsto, zapišemo še zveze, ki med njimi veljajo:

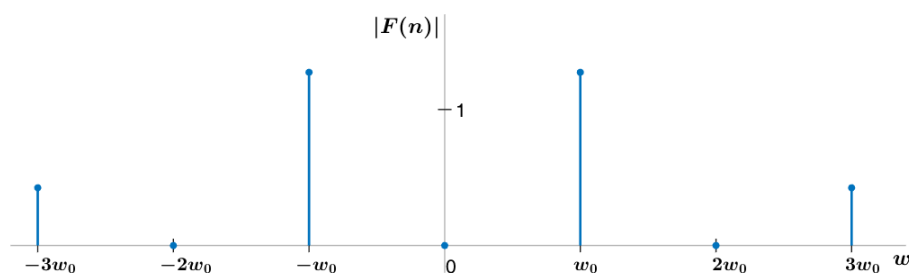
$$F(n) = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (3.15)$$

$$a_n = F(n) + \overline{F(n)} \quad (3.16)$$

$$b_n = j(F(n) - \overline{F(n)}) \quad (3.17)$$

Za določitev amplitudnega spektra (Slika 3.3) bomo uporabili enačbo (3.5):

$$|F_n| = \left| \sqrt{F(n) \cdot \overline{F(n)}} \right| = \left| \frac{2}{n\pi} \sin n\frac{\pi}{2} \right|$$

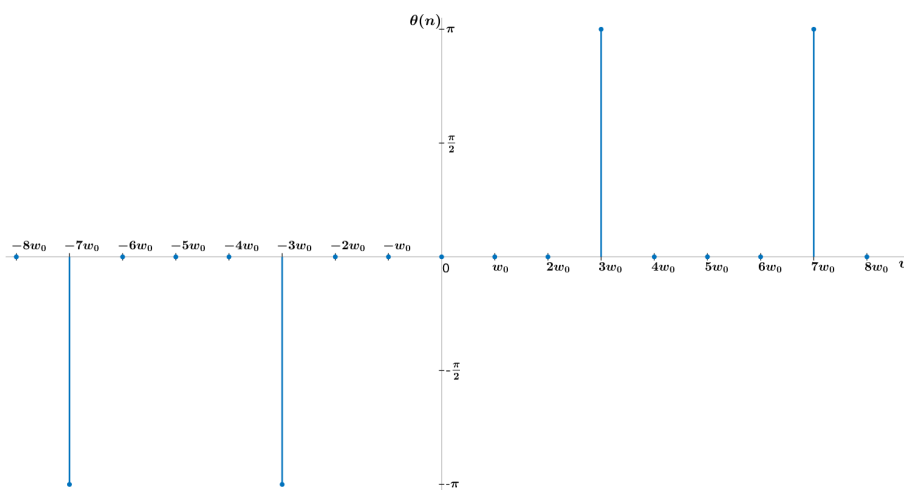


Slika 3.3: Amplitudni spekter $|F(n)|$ signala $f(t)$.

Ker smo izračunali tudi koeficiente realne Fourierjeve vrste, bi lahko za določitev amplitudnega spektra uporabili tudi enačbo (3.11). Rezultat bi bil enak.

Podobno bomo za določitev faznega spektra (Slika 3.4) uporabili enačbo (3.6):

$$\theta(n) = \begin{cases} \pm\pi, & C(n) < 0, D(n) = 0 \\ 0, & C(n) > 0, D(n) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \pm\pi, & n = \pm(4k - 3), k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{za ostale vrednosti } n \end{cases}$$



Slika 3.4: Fazni spekter $|F(n)|$ signala $f(t)$.

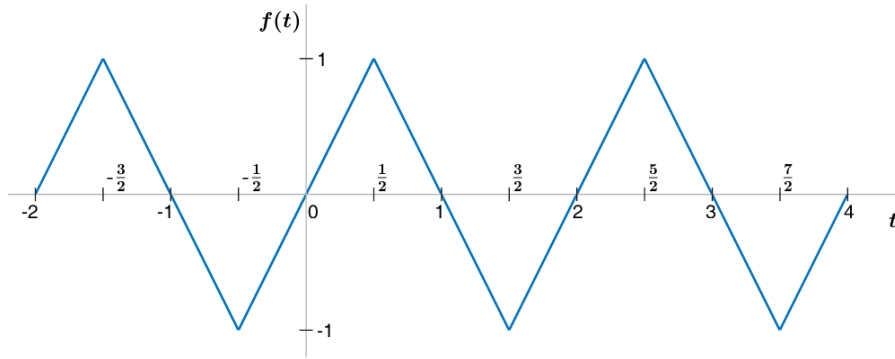
Do enakega rezultata pridemo tudi z uporabo enačbe (3.12).

Vrednosti spektrov so določene le za posamezne frekvence w , ki so enake celemu mnogokratniku osnovne frekvence w_0 ($w = nw_0$).

2. Za podani periodični signal

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -2t + 2, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2} \\ 2t - 4, & \frac{3}{2} \leq t < 2 \\ f(t + mT_0), & \forall t \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ki je prikazan na Sliki 3.5 določi kompleksno in realno Fourierjevo vrsto, amplitudni spekter $|F(n)|$ in fazni spekter $\theta(n)$.



Slika 3.5: Grafični prikaz signala $f(t)$ na časovnem intervalu $(-2, 4)$.

Perioda danega signala $f(t)$ je $T_0 = 2$, osnovna harmonska frekvenca pa $w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$.

Najprej bomo določili koeficiente realne Fourierjeve vrste. Opazimo, da je signal $f(t)$ lih in zaradi tega bodo vsi koeficienti a_n vključno s koeficientom a_0 enaki 0 ($a_n = 0$, $a_0 = 0$). Izračunajmo še koeficiente b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin(nw_0 t) dt = \\ &= \frac{2}{2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 2t \cdot \sin n\pi t dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (-2t + 2) \cdot \sin n\pi t dt + \int_{\frac{3}{2}}^2 (2t - 4) \cdot \sin n\pi t dt \right) = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2t \cdot \sin n\pi t dt - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2t \cdot \sin n\pi t dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2 \cdot \sin n\pi t dt + \int_{\frac{3}{2}}^2 2t \cdot \sin n\pi t dt - \int_{\frac{3}{2}}^2 4 \cdot \sin n\pi t dt = * \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2} \sin n\pi t \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{n\pi} t \cos n\pi t \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{n^2\pi^2} \sin n\pi t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{n\pi} t \cos n\pi t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - \\ &\quad - \frac{2}{n\pi} \cos n\pi t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{n^2\pi^2} \sin n\pi t \Big|_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{2}{n\pi} t \cos n\pi t \Big|_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{4}{n\pi} \cos n\pi t \Big|_{\frac{3}{2}}^2 = \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2} \sin n\frac{\pi}{2} - \underbrace{\frac{2}{n^2\pi^2} \sin 0}_{=0} - \frac{2}{2n\pi} \cos n\frac{\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} \cdot 0 \cdot \cos 0 - \frac{2}{n^2\pi^2} \underbrace{\sin n\frac{3\pi}{2}}_{=-\sin n\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n^2\pi^2} \sin n\frac{\pi}{2} + \end{aligned}$$

*per partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \Rightarrow u = t \, dv = \sin n\pi t \, dt \Rightarrow \int t \cdot \sin n\pi t \, dt = -\frac{1}{n\pi} t \cos n\pi t + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin n\pi t$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3 \cdot 2}{2n\pi} \underbrace{\cos n \frac{3\pi}{2}}_{=\cos n \frac{\pi}{2}} - \frac{2}{2n\pi} \cos n \frac{\pi}{2} - \frac{2}{n\pi} \underbrace{\cos n \frac{3\pi}{2}}_{=\cos n \frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n\pi} \cos n \frac{\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi^2} \underbrace{\sin n 2\pi}_{=0} - \\
& - \frac{2}{n^2\pi^2} \underbrace{\sin n \frac{3\pi}{2}}_{=-\sin n \frac{\pi}{2}} - \frac{2 \cdot 2}{n\pi} \underbrace{\cos n 2\pi}_{=1} + \frac{3 \cdot 2}{2n\pi} \underbrace{\cos n \frac{3\pi}{2}}_{=\cos n \frac{\pi}{2}} + \frac{4}{n\pi} \underbrace{\cos n 2\pi}_{=1} - \frac{4}{n\pi} \underbrace{\cos n \frac{3\pi}{2}}_{=\cos n \frac{\pi}{2}} = \\
& = (2 + 2 + 2 + 2) \frac{1}{n^2\pi^2} \sin n \frac{\pi}{2} + (-1 + 3 - 1 - 2 + 2 + 3 - 4) \frac{1}{n\pi} \cos n \frac{\pi}{2} - \frac{4}{n\pi} + \frac{4}{n\pi} = \\
& = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin n \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

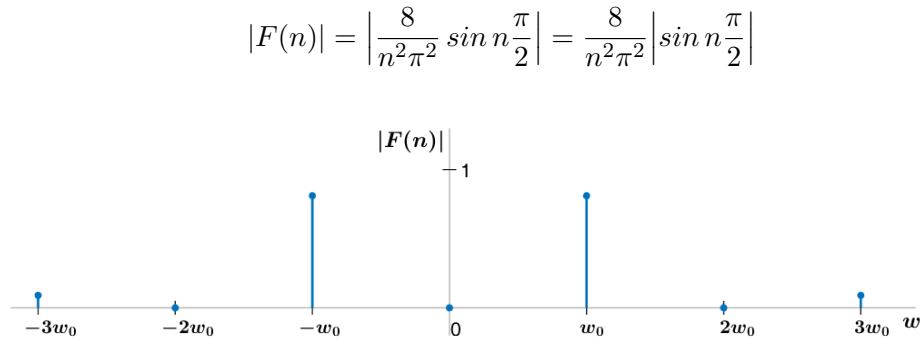
Realna Fourierjeva vrsta signala $f(t)$ je

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n w_0 t + b_n \sin n w_0 t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \sin n \frac{\pi}{2} \sin n \pi t$$

Z realnimi Fourierjevimi koeficienti izrazimo kompleksni spekter $F(n)$ (enačba (3.15)):

$$F(n) = \frac{a_n - j b_n}{2} = -j \frac{4}{n^2\pi^2} \sin n \frac{\pi}{2}$$

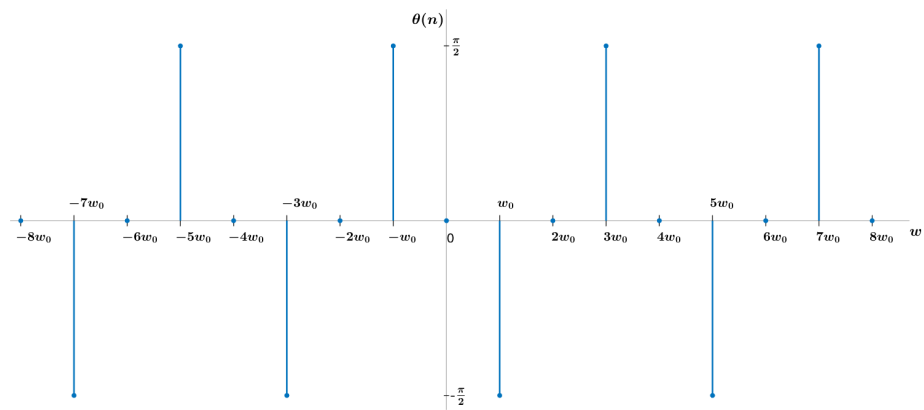
Amplitudni spekter signala (Slika 3.6) je



Slika 3.6: Amplitudni spekter $|F(n)|$ signala $f(t)$.

Fazni spekter signala (Slika 3.7) je

$$\theta(n) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & a_n = 0 \wedge b_n > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a_n = 0 \wedge b_n < 0 \\ 0, & a_n = 0 \wedge b_n = 0 \end{cases}$$



Slika 3.7: Fazni spekter $|F(n)|$ signala $f(t)$.

Poglavje 4

Avtokorelacija, križna korelacija in konvolucija periodičnih signalov

4.1 Uvod

Avtokorelacija periodičnih signalov

Avtokorelacija poljubnega signala $f(t)$ predstavlja korelacijo med signalom in njegovo časovno zamaknjeno kopijo $f(t - \tau)$. Lahko rečemo, da je avtokorelacija podobnost med tema dvema signaloma. Avtokorelacijo $\varphi_{ii}(\tau)$ periodičnega signala $f_i(t)$ s periodo T_0 izračunamo z naslednjo enačbo:

$$\varphi_{ii}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt \quad (4.1)$$

kjer je τ časovni premik kopije signala, t_1 pa izbrana spodnja meja. Avtokorelacija periodičnega signala je tudi sama periodična funkcija z enako periodo. Za avtokorelacijo velja Hermitova simetrija ($\phi_{11}(\tau) = \overline{\phi_{11}(-\tau)}$), kar pomeni, da je potek avtokorelacije povsem določen z njenimi vrednostmi na pozitivni (ali negativni) strani časovne osi.

Kadar periodični signal $f_i(t)$ zadošča Dirichletovim pogojem, ga je možno izraziti s Fourierovo vrsto. V takšnem primeru se tudi njegovo avtokorelacijo $\phi_{11}(\tau)$ lahko predstavi z naslednjo Fourierjevo vrsto:

$$\tilde{\varphi}_{ii}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(n) e^{j n \omega_0 \tau} \quad (4.2)$$

kjer je kompleksni spekter avtokorelacije $\phi_{ii}(n)$ odvisen od kompleksnega spektra signala $F_i(n)$:

$$\phi_{ii}(n) = |F_i(n)|^2 \quad (4.3)$$

Križna korelacija periodičnih signalov

Križno korelacijo med $f_i(t)$ in $f_j(t)$ predstavlja korelacijo med signalom $f_i(t)$ in časovno zamaknjenim signalom $f_j(t-\tau)$. Lahko rečemo, da je križna korelacija mera podobnosti med dvema signaloma. Križno korelacijo $\varphi_{ij}(\tau)$ signalov s periodo T_0 izračunamo z naslednjo enačbo:

$$\varphi_{ij}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau) dt \quad (4.4)$$

kjer je τ vrednost časovnega premika signala $f_j(t)$, t_1 pa izbrana spodnja meja. Križna korelacija je tudi sama periodična s periodo T_0 . Zanj velja lastnost antisimetričnosti ($\varphi_{ji}(\tau) = \overline{\varphi_{ij}(-\tau)}$), zato pri njeni uporabi zadošča, da izračunamo le $\varphi_{ij}(\tau)$ ali $\varphi_{ji}(\tau)$. Kadar je možno signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ predstaviti s Fourierjevo vrsto, je to možno tudi za njuno križno korelacijo:

$$\tilde{\varphi}_{ij}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{ij}(n) e^{jn\omega_0\tau} \quad (4.5)$$

kjer je kompleksni spekter križne korelacije $\phi_{ij}(n)$ odvisen od kompleksnih sprektrov signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$:

$$\phi_{ij}(n) = \overline{F_i(n)} F_j(n) \quad (4.6)$$

Konvolucija periodičnih signalov

Konvolucija signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ je definirana podobno kot križna korelacija, uporablja pa se za modifikacijo signalov. Konvolucijo $\rho_{ij}(\tau)$ signalov s periodo T_0 izračunamo z naslednjo enačbo:

$$\rho_{ij}(\tau) = f_i(t) * f_j(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f_i(t) f_j(\tau-t) dt \quad (4.7)$$

kjer je τ vrednost časovnega premika signala $f_j(-t)$, t_1 pa izbrana spodnja meja. Perioda konvolucije je T_0 . Konvolucija dveh signalov je simetrična ($\rho_{ji}(\tau) = \rho_{ij}(\tau)$) in zato velja zakon o komutativnosti $f_i(t) * f_j(t) = f_j(t) * f_i(t)$. Podobno kot pri križni korelaciji je, kadar sta $f_i(t)$ in $f_j(t)$ signala, ki ju lahko predstavimo s Fourierovo vrsto, to možno tudi za njuno konvolucijo:

$$\tilde{\rho}_{ij}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{ij}(n) e^{jn\omega_0\tau} \quad (4.8)$$

kjer je kompleksni spekter konvolucije $\rho_{ij}(n)$ odvisen od kompleksnih sprektrov $F_i(n)$ in $F_j(n)$:

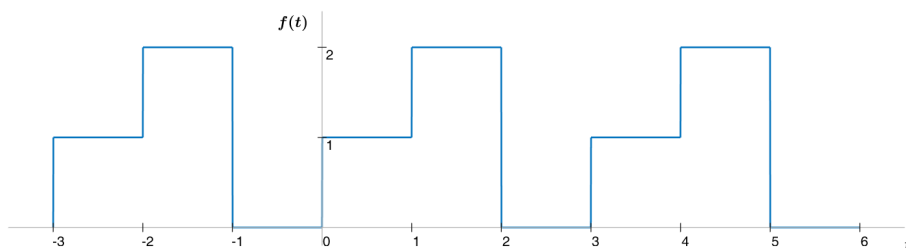
$$R_{ij}(n) = F_i(n) F_j(n) \quad (4.9)$$

4.2 Naloge

1. Za periodični signal

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t < 3 \\ f_1(t + mT_0), & \forall t \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ki je prikazan na Sliki 4.1 določi avtokorelacijo φ_{11} in skiciraj njen potek.

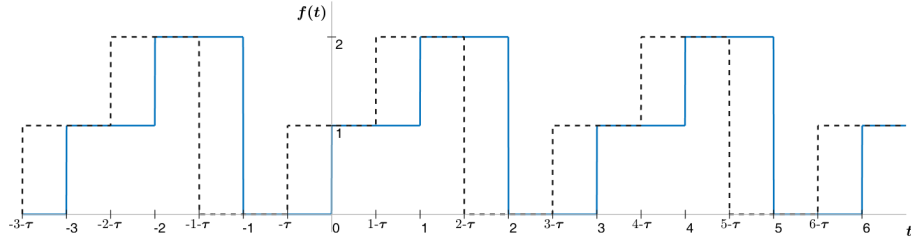


Slika 4.1: Grafični prikaz signala $f_1(t)$ na časovnem intervalu $(-3, 6)$.

V skladu z enačbo (6.1) avtokorelacijo izračunamo za eno periodo signala. Perioda danega signala $f_1(t)$ je $T_0 = 3$, zato bomo signal premikali v levo za največ 3. Med premikanjem računamo ploščino pod eno periodo krivulje, ki je določena s produktom signala $f_1(t)$ in premaknjenega signala $f_1(t + \tau)$, kjer je τ velikost premika. Opazimo, da se s premikanjem za $0 < \tau \leq 3$ različna področja prekrivajo različno. Kadar je $0 < \tau \leq 1$ imamo na primer delno prekrivanje višje stopničke signala $f_1(t)$ z višjo stopničko premaknjenega signala $f_1(t + \tau)$ (Slika 4.2). Kadar je $1 < \tau \leq 2$ se stopnički ne bosta prekrivali (Slika 4.3), vendar se z nadaljnjim premikanjem za $2 < \tau \leq 3$ ponovno začneta prekrivati (Slika 4.4). Iz tega razloga bomo avtokorelacijo izračunali za tri različne neprekrivajoče intervale koraka premika τ :

$0 < \tau \leq 1$ (Slika 4.2):

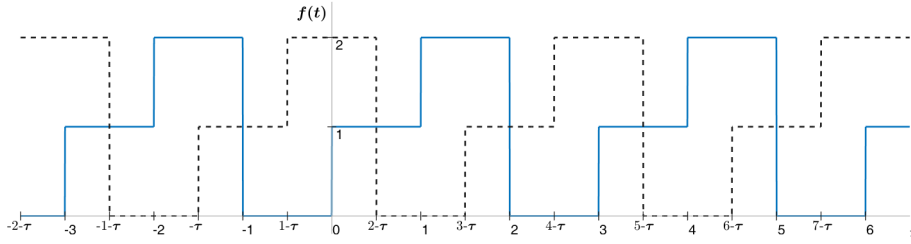
$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt = \frac{1}{3} \int_0^3 f_1(t) f_1(t + \tau) dt = \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_0^{1-\tau} 1 \cdot 1 dt + \int_{1-\tau}^1 1 \cdot 2 dt + \int_1^{2-\tau} 2 \cdot 2 dt + \underbrace{\int_{2-\tau}^2 2 \cdot 0 dt}_{=0} + \underbrace{\int_2^{3-\tau} 0 \cdot 0 dt}_{=0} + \underbrace{\int_{3-\tau}^3 0 \cdot 1 dt}_{=0} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(t \Big|_0^{1-\tau} + 2t \Big|_{1-\tau}^1 + 4t \Big|_1^{2-\tau} \right) = \frac{1}{3} (1 - \tau - 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot (1 - \tau) + 4 \cdot (2 - \tau) - 4 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{3} (1 - \tau + 2 - 2 + 2\tau + 8 - 4\tau - 4) = \frac{1}{3} (5 - 3\tau) = -\tau + \frac{5}{3} \end{aligned}$$



Slika 4.2: Prekrivanje signala $f_1(t)$ v območju $0 < \tau \leq 1$.

$1 < \tau \leq 2$ (Slika 4.3):

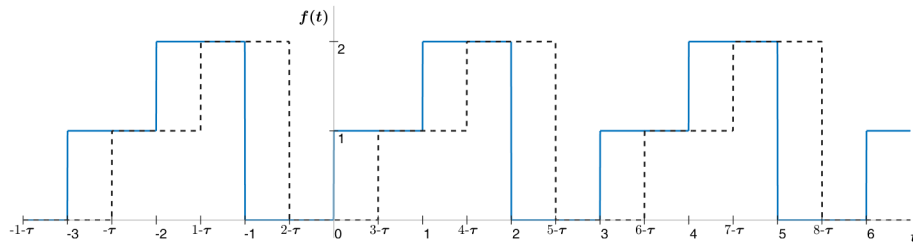
$$\begin{aligned}
 \varphi_{11}(\tau) &= \frac{1}{3} \left(\int_0^{2-\tau} 1 \cdot 2 \, dt + \underbrace{\int_{2-\tau}^1 1 \cdot 0 \, dt}_{=0} + \underbrace{\int_1^{3-\tau} 2 \cdot 0 \, dt}_{=0} + \int_{3-\tau}^2 2 \cdot 1 \, dt + \right. \\
 &+ \left. \int_2^{4-\tau} 0 \cdot 1 \, dt + \underbrace{\int_{4-\tau}^3 0 \cdot 2 \, dt}_{=0} \right) = \frac{1}{3} \left(2t \Big|_0^{2-\tau} + 2t \Big|_{3-\tau}^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{3} (2 \cdot (2 - \tau) - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (3 - \tau)) = \frac{1}{3} (4 - 2\tau + 4 - 6 + 2\tau) = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$



Slika 4.3: Prekrivanje signala $f_1(t)$ v območju $1 < \tau \leq 2$.

$2 < \tau \leq 3$ (Slika 4.4):

$$\begin{aligned}
 \varphi_{11}(\tau) &= \frac{1}{3} \left(\int_0^{3-\tau} \underbrace{1 \cdot 0 \, dt}_{=0} + \int_{3-\tau}^1 1 \cdot 1 \, dt + \int_1^{4-\tau} 2 \cdot 1 \, dt + \int_{4-\tau}^2 2 \cdot 2 \, dt + \right. \\
 &+ \left. \int_2^{5-\tau} \underbrace{0 \cdot 2 \, dt}_{=0} + \int_{5-\tau}^3 \underbrace{0 \cdot 0 \, dt}_{=0} \right) = \frac{1}{3} \left(t \Big|_{3-\tau}^1 + 2t \Big|_1^{4-\tau} + 4t \Big|_{4-\tau}^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{3} (1 - (3 - \tau) + 2 \cdot (4 - \tau) - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 4 \cdot (4 - \tau)) = \\
 &= \frac{1}{3} (1 - 3 + \tau + 8 - 2\tau - 2 + 8 - 16 + 4\tau) = \frac{1}{3} (3\tau - 4) = \tau - \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

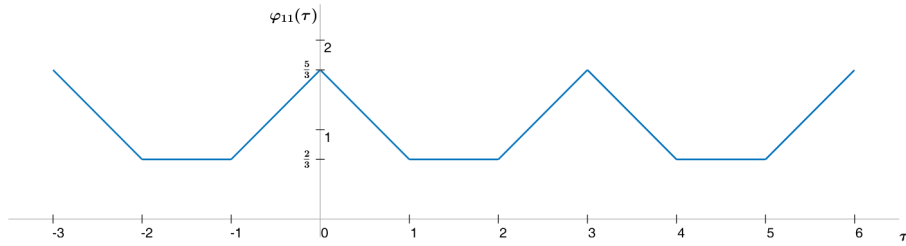


Slika 4.4: Prekrivanje signala $f_1(t)$ v območju $2 < \tau \leq 3$.

Avtokorelacija $\varphi_{11}(\tau)$ signala $f_1(t)$ je torej

$$\varphi_{11}(\tau) = \begin{cases} -\tau + \frac{5}{3}, & 0 < \tau \leq 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 < \tau \leq 2 \\ \tau - \frac{4}{3}, & 2 < \tau \leq 3 \\ \varphi_{11}(\tau + mT_0), & \forall \tau \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Avtokorelacija je soda funkcija ($\varphi_{11}(-\tau) = \varphi_{11}(\tau)$) in zato z določitvijo poteka avtokorelacije za pozitivne vrednosti τ posredno določimo tudi potek za negativne vrednosti τ . Ker je $f_1(t)$ periodični signal s periodo T_0 je tudi avtokorelacija $\varphi_{11}(\tau)$ periodična funkcija s periodo $T_0 = 3$. Avtokorelacija $\varphi_{11}(\tau)$ je prikazana na Sliki 4.5.

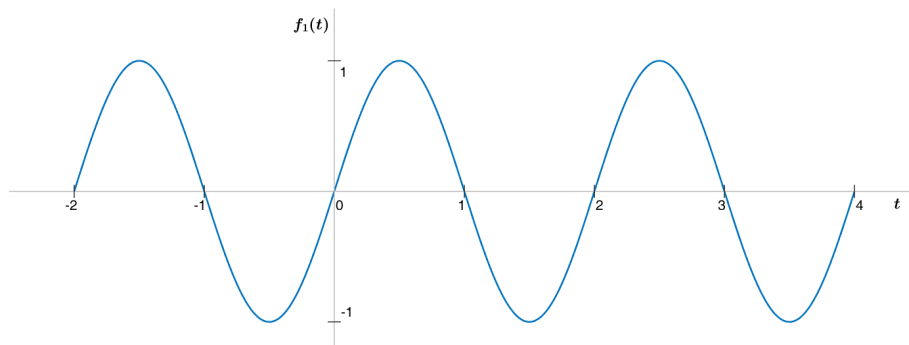


Slika 4.5: Avtokorelacija $\varphi_{11}(\tau)$ signala $f_1(t)$.

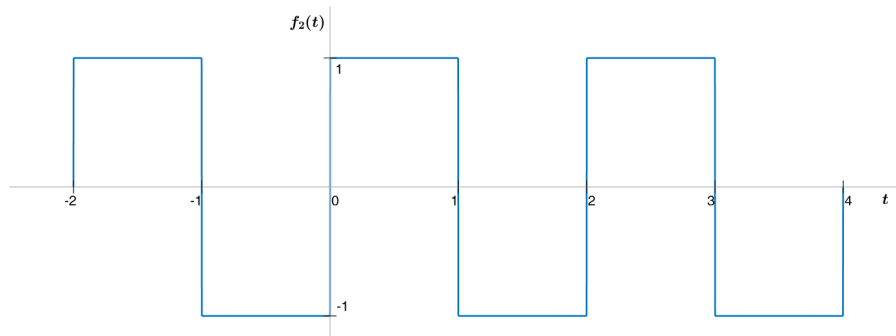
2. Določite križni korelaciji $\varphi_{12}(\tau)$ in $\varphi_{21}(\tau)$ podanih dveh periodičnih signalov

$$f_1(t) = \sin \pi t, \quad f_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t < 2 \\ f_2(t + mT_0), & \forall t \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ki sta prikazana na Slikah 4.6 in 4.7.



Slika 4.6: Grafični prikaz signala $f_1(t)$ na časovnem intervalu $(-2, 4)$.

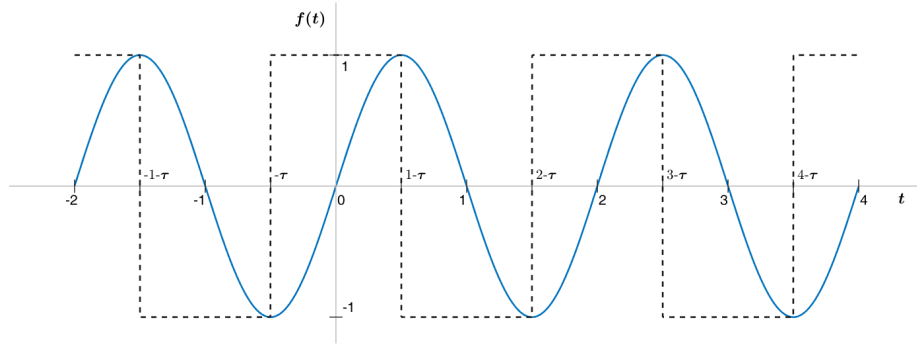


Slika 4.7: Grafični prikaz signala $f_2(t)$ na časovnem intervalu $(-2, 4)$.

Periodična signala $f_1(t)$ in $f_2(t)$ imata periodo $T_0 = 2$ in zato bomo križno korelacijo teh dveh signalov izračunali na eni periodi in sicer za τ na intervalu $(0, 2]$. Križno korelacijo bomo najprej izračunali s premikanjem drugega signala $f_2(t)$. Zaradi različnih načinov prekrivanja signalov med premikanjem bomo interval $\tau \in (0, 2]$ razdelili na dva dela. V skladu z enačbo (6.2):

$0 < \tau \leq 1$ (Slika 4.8):

$$\begin{aligned}
\varphi_{12}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f_1(t) f_2(t+\tau) dt = \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^{1-\tau} \sin \pi t \cdot 1 dt + \int_{1-\tau}^{2-\tau} \sin \pi t \cdot (-1) dt + \int_{2-\tau}^2 \sin \pi t \cdot 1 dt \right) = * \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \Big|_0^{1-\tau} - \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right) \Big|_{1-\tau}^{2-\tau} - \frac{1}{\pi} \cos \pi t \Big|_{2-\tau}^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(-(\cos(\pi-\pi\tau) - \cos 0) + (\cos(2\pi-\pi\tau) - \cos(\pi-\pi\tau)) - (\cos 2\pi - \cos(2\pi-\pi\tau)) \right) = \\
&\quad ** \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\cos \pi\tau + \underbrace{\cos 0}_{=1} + \cos \pi\tau + \cos \pi\tau - \underbrace{\cos 2\pi}_{=1} + \cos \pi\tau \right) = \frac{1}{2\pi} (4 \cos \pi\tau) = \frac{2}{\pi} \cos \pi\tau
\end{aligned}$$



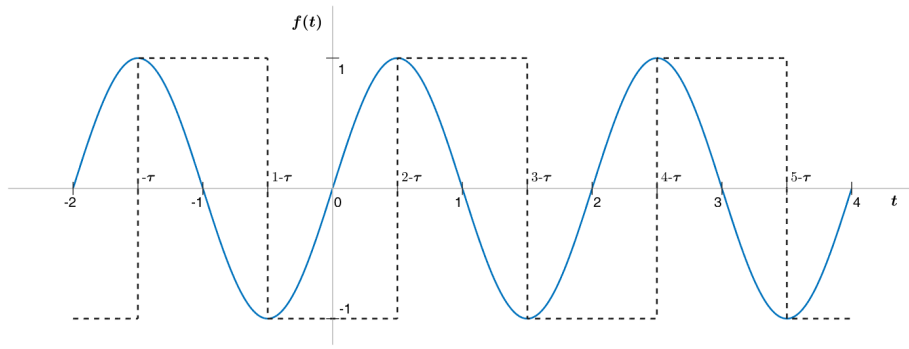
Slika 4.8: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t+\tau)$ za $0 < \tau \leq 1$.

$1 < \tau \leq 2$ (Slika 4.9):

$$\begin{aligned}
\varphi_{12}(\tau) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2-\tau} \sin \pi t \cdot (-1) dt + \int_{2-\tau}^{3-\tau} \sin \pi t \cdot 1 dt + \int_{3-\tau}^2 \sin \pi t \cdot (-1) dt \right) = * \\
&= \frac{1}{2} \left(-\left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right) \Big|_0^{2-\tau} - \frac{1}{\pi} \cos \pi t \Big|_{2-\tau}^{3-\tau} - \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right) \Big|_{3-\tau}^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\cos(2\pi-\pi\tau) - \cos 0 - \underbrace{(\cos(3\pi-\pi\tau) - \cos(2\pi-\pi\tau))}_{=\cos(\pi-\pi\tau)**} + \underbrace{(\cos 2\pi - \cos(3\pi-\pi\tau))}_{=\cos(\pi-\pi\tau)**} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\cos \pi\tau - \underbrace{\cos 0}_{=1} + \cos \pi\tau + \cos \pi\tau + \underbrace{\cos 2\pi}_{=1} + \cos \pi\tau \right) = \frac{1}{2\pi} (4 \cos \pi\tau) = \frac{2}{\pi} \cos \pi\tau
\end{aligned}$$

* $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$

** $\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$; $\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$, $\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha$; $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha$



Slika 4.9: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $1 < \tau \leq 2$.

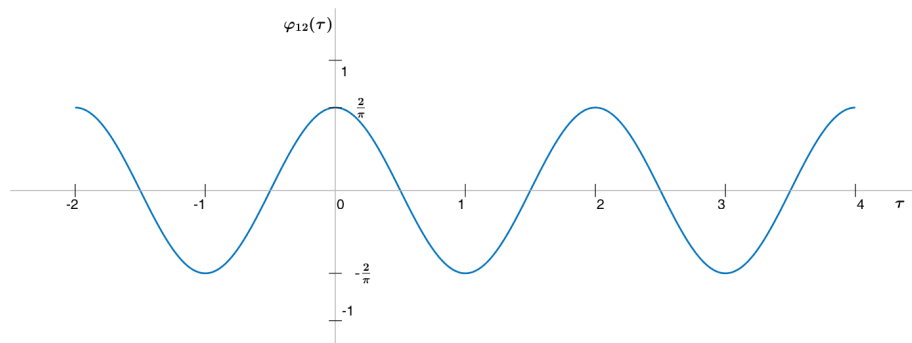
Križna korelacija φ_{12} je torej:

$$\varphi_{12} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos \pi \tau, & 0 < \tau \leq 2 \\ \varphi_{12}(\tau + mT_0), & \forall \tau \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ker sta $f_1(t)$ in $f_2(t)$ periodična signala s periodo $T_0 = 2$ je tudi avtokorelacija $\varphi_{12}(\tau)$ periodična funkcija s periodo $T_0 = 2$. Skicirajmo potek križne korelacije tako, da najprej izračunamo vrednost $\varphi_{12}(\tau)$ v točkah $\tau \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$:

$$\varphi_{12} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos(\pi \cdot 0) = \frac{2}{\pi}, & \tau = 0 \\ \frac{2}{\pi} \cos(\pi \cdot \frac{1}{2}) = 0, & \tau = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{\pi} \cos(\pi \cdot 1) = -\frac{2}{\pi}, & \tau = 1 \\ \frac{2}{\pi} \cos(\pi \cdot \frac{3}{2}) = 0, & \tau = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{\pi} \cos(\pi \cdot 2) = \frac{2}{\pi}, & \tau = 2 \end{cases}$$

Grafični prikaz križne korelacije φ_{12} je podan na Sliki 4.10.



Slika 4.10: Grafični prikaz križne korelacije φ_{12} signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ na časovnem intervalu $(-2, 4)$.

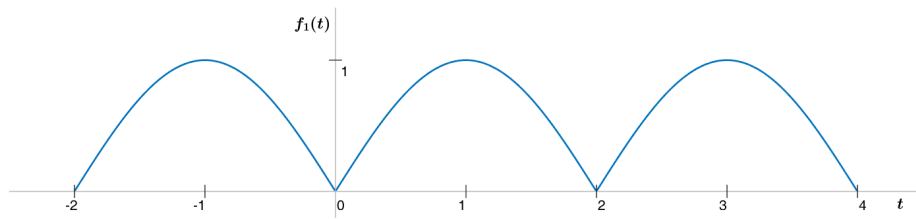
Križno korelacijo φ_{21} bomo določili s pomočjo lastnosti križnih korelacij. Za križne korelacije vemo, da so antisimetrične ($\varphi_{ij}(\tau) = \overline{\varphi_{ji}(-\tau)}$). Posledično:

$$\begin{aligned}\varphi_{21}(\tau) &= \overline{\varphi_{12}(-\tau)} = \varphi_{12}(-\tau) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos \pi \cdot (-\tau), & 0 < \tau \leq 2 \\ \varphi_{21}(\tau + mT_0), & \forall \tau \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos \pi \tau, & 0 < \tau \leq 2 \\ \varphi_{21}(\tau + mT_0), & \forall \tau \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}\end{aligned}$$

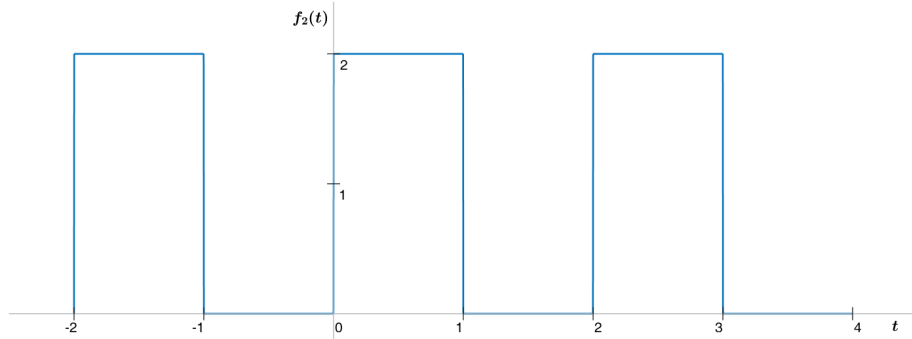
3. Določite konvolucijo $\rho_{12}(\tau)$ podanih periodičnih signalov

$$f_1(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2}t, & 0 \leq t < 2 \\ f_1(t + mT_0), & \forall t \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}; f_2(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ f_2(t + mT_0), & \forall t \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ki sta prikazana na Slikah 4.11 in 4.12. Skicirajte potek konvolucije.



Slika 4.11: Grafični prikaz signala $f_1(t)$ na časovnem intervalu $(-2, 4)$.

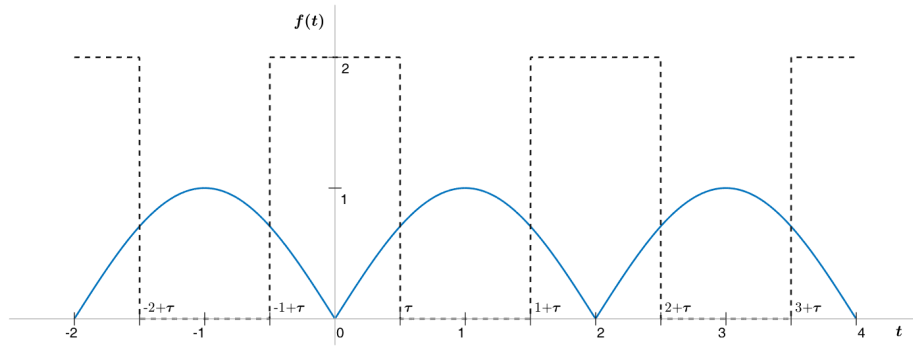


Slika 4.12: Grafični prikaz signala $f_2(t)$ na časovnem intervalu $(-2, 4)$.

Perioda danih periodičnih signalov $f_1(t)$ in $f_2(t)$ je $T_0 = 2$, zato bomo konvolucijo ρ_{12} izračunali za $\tau \in (0, 2]$. Za razliko od korelacije se konvolucija ρ_{12} računa s premikanjem signala $f_2(-t)$ v desno, za τ (enačba (6.3)). Signal, ki ga premikamo naprej, torej prezrcalimo glede na y os, nato pa premikamo v desno za različne korake τ :

$0 < \tau \leq 1$ (Slika 4.13):

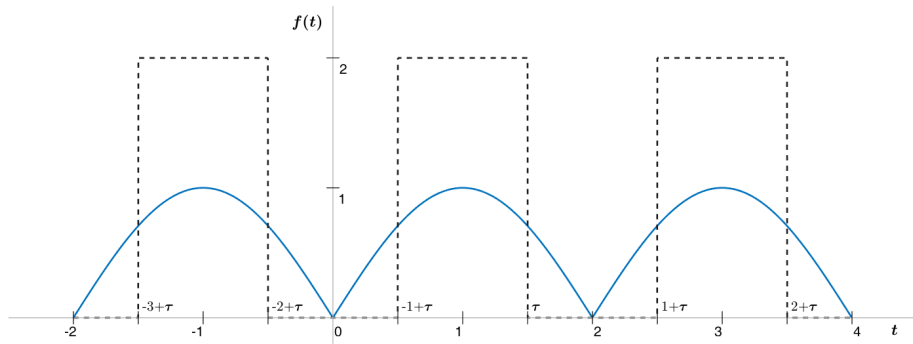
$$\begin{aligned}
\rho_{12}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f_i(t) f_j(\tau-t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f_1(t) f_2(\tau-t) dt = \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\tau \sin \frac{\pi}{2} t \cdot 2 dt + \underbrace{\int_\tau^{1+\tau} \sin \frac{\pi}{2} t \cdot 0 dt}_{=0} + \int_{1+\tau}^2 \sin \frac{\pi}{2} t \cdot 2 dt \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(2 \left(-\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} t \Big|_0^\tau \right) + 2 \left(-\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} t \Big|_{1+\tau}^2 \right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} \tau - \underbrace{\cos 0}_{=1} \right) - \frac{4}{\pi} \left(\underbrace{\cos \pi}_{=-1} - \underbrace{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \tau \right)}_{=-\sin \frac{\pi}{2} \tau^*} \right) \right) = \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\cos \frac{\pi}{2} \tau + 1 + 1 - \sin \frac{\pi}{2} \tau \right) = \frac{2}{\pi} \left(2 - \cos \frac{\pi}{2} \tau - \sin \frac{\pi}{2} \tau \right)
\end{aligned}$$



Slika 4.13: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(-t + \tau)$ za $0 < \tau \leq 1$.

$1 < \tau \leq 2$ (Slika 4.14):

$$\begin{aligned}
\rho_{12}(\tau) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{-1+\tau} \sin \frac{\pi}{2} t \cdot 0 dt + \underbrace{\int_{-1+\tau}^\tau \sin \frac{\pi}{2} t \cdot 2 dt}_{=0} + \int_\tau^2 \sin \frac{\pi}{2} t \cdot 0 dt \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(2 \left(-\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} t \Big|_{-1+\tau}^\tau \right) \right) = -\frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} \tau - \underbrace{\cos \left(\frac{\pi}{2} \tau - \frac{\pi}{2} \right)}_{=\sin \frac{\pi}{2} \tau^{**}} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} \tau - \cos \frac{\pi}{2} \tau \right)
\end{aligned}$$



Slika 4.14: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(-t + \tau)$ za $1 < \tau \leq 2$.

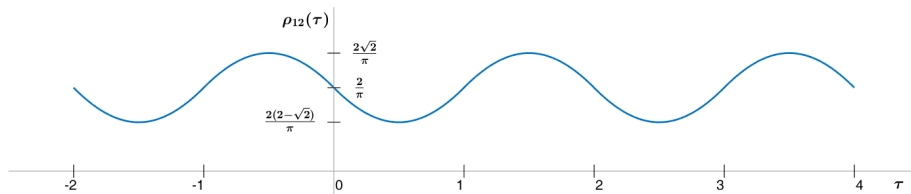
Konvolucija ρ_{12} je torej

$$\rho_{12} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(2 - \cos \frac{\pi}{2} \tau - \sin \frac{\pi}{2} \tau \right), & 0 < \tau \leq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} \tau - \cos \frac{\pi}{2} \tau \right), & 1 < \tau \leq 2 \\ \rho_{12}(\tau + mT_0), & \forall \tau \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

in je periodična funkcija s periodo $T_0 = 2$, ker je perioda obeh signalov $f_1(t)$ in $f_2(t)$ enaka 2. Skicirajmo potek konvolucije tako, da najprej izračunamo vrednost $\rho_{12}(\tau)$ v točkah $\tau \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$:

$$\rho_{12} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(2 - \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 \right) \right) = \frac{2}{\pi}, & \tau = 0 \\ \frac{2}{\pi} \left(2 - \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{2(2-\sqrt{2})}{\pi}, & \tau = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{\pi} \left(2 - \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 \right) \right) = \frac{2}{\pi}, & \tau = 1 \\ \frac{2}{\pi} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, & \tau = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{\pi} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot 2 \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot 2 \right) \right) = \frac{2}{\pi}, & \tau = 2 \end{cases}$$

Grafični prikaz konvolucije ρ_{12} je podan na Sliki 4.15.



Slika 4.15: Grafični prikaz konvolucije ρ_{12} signalov $f_1(t)$ in $f_2(t)$ na časovnem intervalu $(-2, 4)$.

V primeru, da nas to zanima, bi konvolucijo ρ_{21} lahko določili s pomočjo lastnosti simetričnosti, ki zanjo velja ($\rho_{ij}(\tau) = \rho_{ji}(\tau)$):

$$\rho_{21} = \rho_{12} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(2 - \cos \frac{\pi}{2} \tau - \sin \frac{\pi}{2} \tau \right), & 0 < \tau \leq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} \tau - \cos \frac{\pi}{2} \tau \right), & 1 < \tau \leq 2 \\ \rho_{12}(\tau + mT_0), & \forall \tau \wedge m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Poglavje 5

Frekvenčna analiza neperiodičnih signalov

5.1 Uvod

Periodične signale s periodo T_0 lahko izrazimo s Fourierjvimi vrstami, vendar to ne velja za neperiodične signale. Po drugi strani, ko periodo T_0 periodičnega signala $f_p(t)$ limitiramo proti neskončnosti ($T_0 \rightarrow \infty$), periodični signal $f_p(t)$ preide v neperiodični signal $f(t)$. Posledično z ustrezno matematično izpeljavo iz Fourierjeve vrste signala $\tilde{f}_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t}$ dobimo integral kompleksnih sinusnih nihanj $e^{j\omega t}$, ki predstavlja zapis neperiodičnega signala $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} d\omega$$

Temu integralu rečemo *Fourierjev integral* in ga lahko razčlenimo v Fourierjevo transformacijo $\mathcal{F}[f(t)]$ in inverzno Fourierjevo transformacijo $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)], \quad F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.2)$$

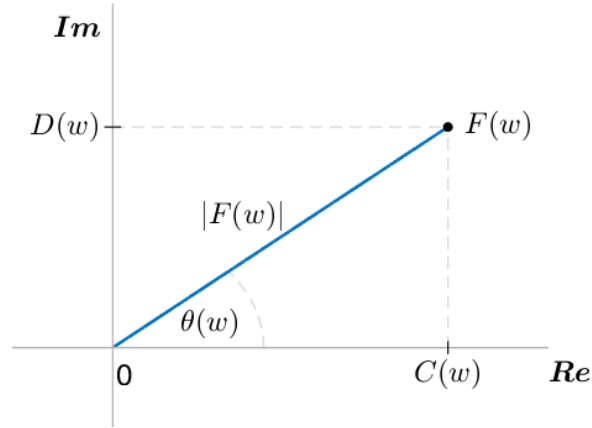
Neperiodičen signal $f(t)$ in njegov Fourierjev transform $F(\omega)$ sta Fourierjev par. Fourierjev transform $F(\omega)$ imenujemo tudi *kompleksni spekter* signala $f(t)$. Podobno kot pri periodičnih signalih kompleksni spekter sestavljata realni del spektra $C(\omega)$ in imaginarni del spektra $D(\omega)$:

$$F(\omega) = C(\omega) + j D(\omega) \quad (5.3)$$

Zaradi analize frekvenčnih lastnosti signalov ponavadi uporabljamo polarni zapis kompleksnega spektra (Slika 5.1):

$$F(w) = |F(w)|e^{j\theta(w)} \quad (5.4)$$

kjer je $|F(w)|$ *spekter amplitudne gostote*, ki podaja amplitudno gostoto nihanja e^{jwt} pri frekvenci w , $\theta(w)$ pa je *fazni zamik* pri tej frekvenci.



Slika 5.1: Grafični prikaz kompleksnega spektra $F(w) = C(w) + jD(w)$ v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$, kjer je $C(w)$ realni, $D(w)$ pa imaginarni del spektra. $|F(w)|$ predstavlja spekter amplitudne gostote pri frekvenci w , $\theta(w)$ pa fazni zamik pri tej frekvenci.

S pomočjo Slike 5.1 zapišemo še zveze med polarnim (enačba (5.4)) in kartezičnim zapisom (enačba (5.3)) kompleksnega spektra $F(w)$:

$$|F(w)| = \left| \sqrt{C^2(w) + D^2(w)} \right| = \left| \sqrt{F(w) \cdot \overline{F(w)}} \right| \quad (5.5)$$

$$\theta(w) = \begin{cases} \arctg \frac{D(w)}{C(w)}, & C(w) > 0 \\ \pm\pi + \arctg \frac{D(w)}{C(w)}, & C(w) < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & C(w) = 0 \wedge D(w) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & C(w) = 0 \wedge D(w) < 0 \\ 0, & C(w) = 0 \wedge D(w) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

$$C(w) = |F(w)| \cdot \cos \theta(w) \quad (5.7)$$

$$D(w) = |F(w)| \cdot \sin \theta(w) \quad (5.8)$$

Spekter realnih signalov $F(w)$ je popolnoma določen z njegovim potekom za pozitivne frekvence w . Potek kompleksnega spektra za negativne frekvence dobimo iz naslednje zveze:

$$F(-w) = \overline{F(w)}$$

Naštejemo še lastnosti kompleksnega spektra, ki izhajajo iz te zveze:

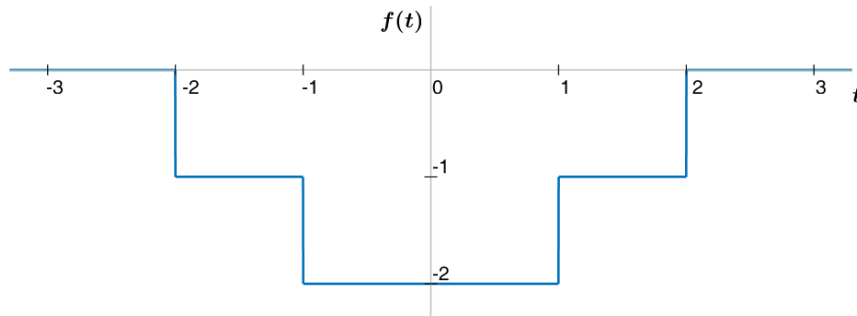
- $C(w) = C(-w) \implies$ realni spekter $C(w)$ je soda funkcija,
- $D(w) = -D(-w) \implies$ kompleksni spekter $D(w)$ je liha funkcija,
- $|F(w)| = |F(-w)| \implies$ amplitudni spekter $|F(w)|$ je soda funkcija,
- $\theta(w) = -\theta(-w) \implies$ fazni spekter $\theta(w)$ je liha funkcija.

5.2 Naloge

1. Za podani neperiodični signal

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t \in (-2, -1) \cup (1, 2) \\ -2, & t \in (-1, 1) \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

ki je prikazan na Sliki 5.2 določi kompleksni, amplitudni, fazni spekter in spekter energijske gostote.



Slika 5.2: Grafični prikaz signala $f(t)$ na časovnem intervalu $(-3, 3)$.

Kompleksni spekter signala $f(t)$ bomo poiskali na dva načina in sicer najprej z računanjem Fourierjeve transformacije po definiciji (enačba 5.1), nato pa še z odvajanjem in uporabo tabele Fourierjevih transformacij nekaterih osnovnih funkcij.

I. Uporaba osnovne definicije Fourierjeve transformacije

$$\begin{aligned} F(w) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-jwt} dt = \int_{-\infty}^{-2} 0 \cdot e^{-jwt} dt + \int_{-2}^{-1} (-1) \cdot e^{-jwt} dt + \\ &+ \int_{-1}^1 (-2) \cdot e^{-jwt} dt + \int_1^2 (-1) \cdot e^{-jwt} dt + \int_2^{\infty} 0 \cdot e^{-jwt} dt = \\ &= (-1) \cdot \frac{1}{-jw} e^{-jwt} \Big|_{-2}^{-1} + (-2) \cdot \frac{1}{-jw} e^{-jwt} \Big|_{-1}^1 + (-1) \cdot \frac{1}{-jw} e^{-jwt} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{jw} (e^{jw} - e^{2jw} + 2e^{-jw} - 2e^{jw} + e^{-2jw} - e^{-jw}) = \frac{1}{jw} (-e^{jw} - e^{2jw} + e^{-jw} + e^{-2jw}) = * \end{aligned}$$

* $e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$

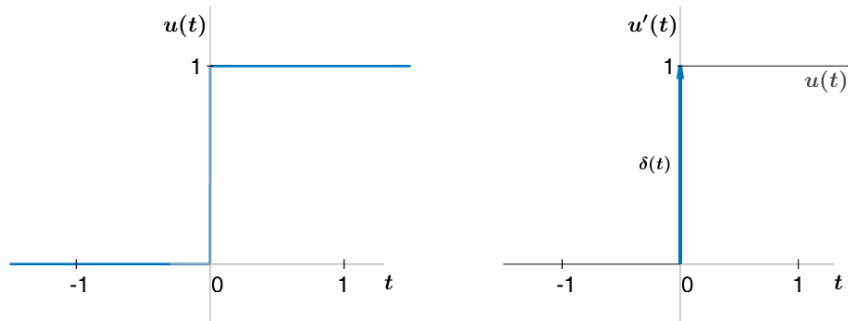
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{jw} (-\cancel{\cos w} - j \sin w - \cancel{\cos 2w} - j \sin 2w + \cancel{\cos w} - j \sin w + \cancel{\cos 2w} - j \sin 2w) = \\
&= \frac{1}{jw} (-2j \sin w - 2j \sin 2w) = ** - \frac{2}{w} (\sin w + 2 \sin w \cdot \cos w)
\end{aligned}$$

II. Odvajanje in uporaba tabele Fourierjevih transformacij osnovnih funkcij

Pri določanju kompleksnega spektra si lahko pomagamo z operacijo odvajanja, pri čemer Fourierjevo transformacijo signala $f(t)$ določimo posredno preko Fourierjeve transformacije njegovega n -tega odvoda $\left(\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (jw)^n F(w)\right)$. Ker si pri tem želimo, da je funkcija n -tega odvoda čimbolj preprosta, polinomske signale odvajamo, dokler ne dobimo linearne kombinacije delta impulzov δ , nato pa s pomočjo tabele Fourierjevih transformacij (glej dodatek B.1) zapišemo Fourierjev transform neperiodičnega signala $f(t)$. Delta impulz (v literaturi ga lahko srečamo tudi pod imenom Diracov impulz ali enotin impulz) predstavlja infinitezimalno ozek pravokotni impulz ob času 0, ki ga grafično ponazorimo z odebeljeno puščico. Naj bo $u(t)$ enotna stopnica:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Odvod enotne stopnice je v vseh točkah enak 0, razen v točki $t = 0$, kjer je neskončen in je zato definiran z delta impulzom $\delta(t)$ (Slika 5.3).



Slika 5.3: Graf enotne stopnice $u(t)$ (levo) in njenega odvoda - delta impulz $\delta(t)$ (desno).

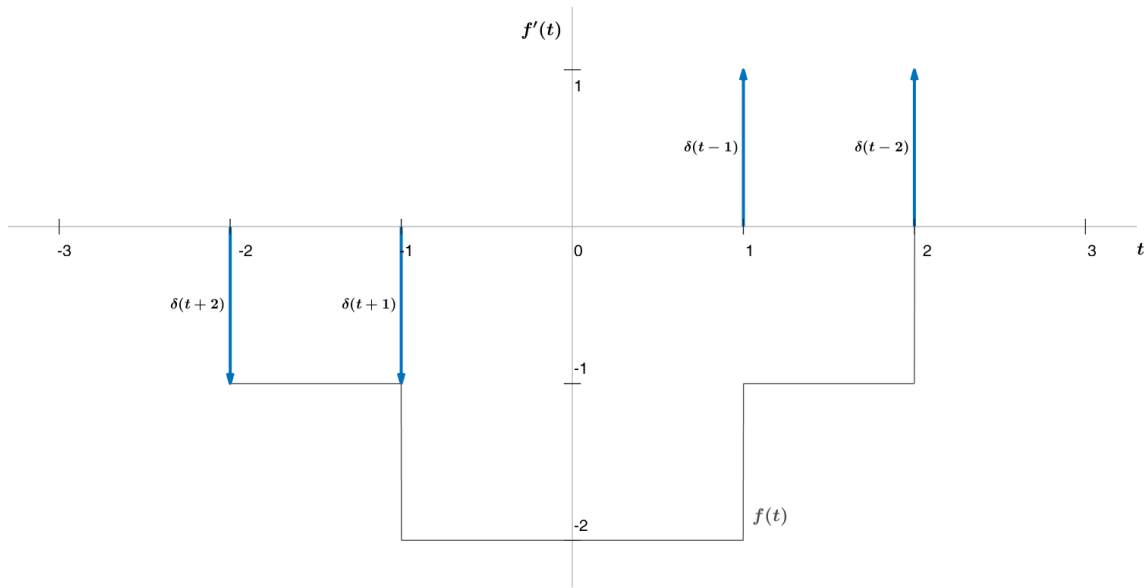
V našem primeru, je funkcija $f(t)$ stopničasta in zato zadostuje, če poiščemo njen prvi odvod (Slika 5.4).

$$f'(t) = -\delta(t+2) - \delta(t+1) + \delta(t-1) + \delta(t+2) \quad \Bigg/ \quad \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (jw)^n F(w), \quad \mathcal{F}[\delta(t \pm t_0)] = e^{\pm jw t_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow jw \cdot F(w) = -e^{2jw} - e^{jw} + e^{-jw} + e^{-2jw}$$

** $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$



Slika 5.4: Grafični prikaz prvega odvoda $f'(t)$ neperiodičnega signala $f(t)$.

$$\begin{aligned}
 F(w) &= \frac{1}{jw} (-e^{2jw} - e^{jw} + e^{-jw} + e^{-2jw}) = \\
 &= \frac{1}{jw} (-\cos 2w - j \sin 2w - \cos w - j \sin w + \cos w - j \sin w + \cos 2w - j \sin 2w) = \\
 &= \frac{1}{jw} (-2j \sin w - 2j \sin 2w) = -\frac{2}{w} (\sin w + 2 \sin w \cdot \cos w)
 \end{aligned}$$

Kot vidimo, je rezultat enak rezultatu, ki smo ga dobili z uporabo osnovne definicije Fourierjeve transformacije. Izračunan kompleksni spekter nima imaginarnega dela ($D(w) = 0$), kar je bilo pričakovano, saj je $f(t)$ sodi signal. Za lihe realne signale velja $C(w) = 0$ (kompleksni spekter nima realnega dela). S pomočjo enačbe (5.5) zapišemo amplitudni spekter signala (Slika 5.5):

$$|F(w)| = \left| \frac{2}{w} (\sin w + 2 \sin w \cdot \cos w) \right|$$

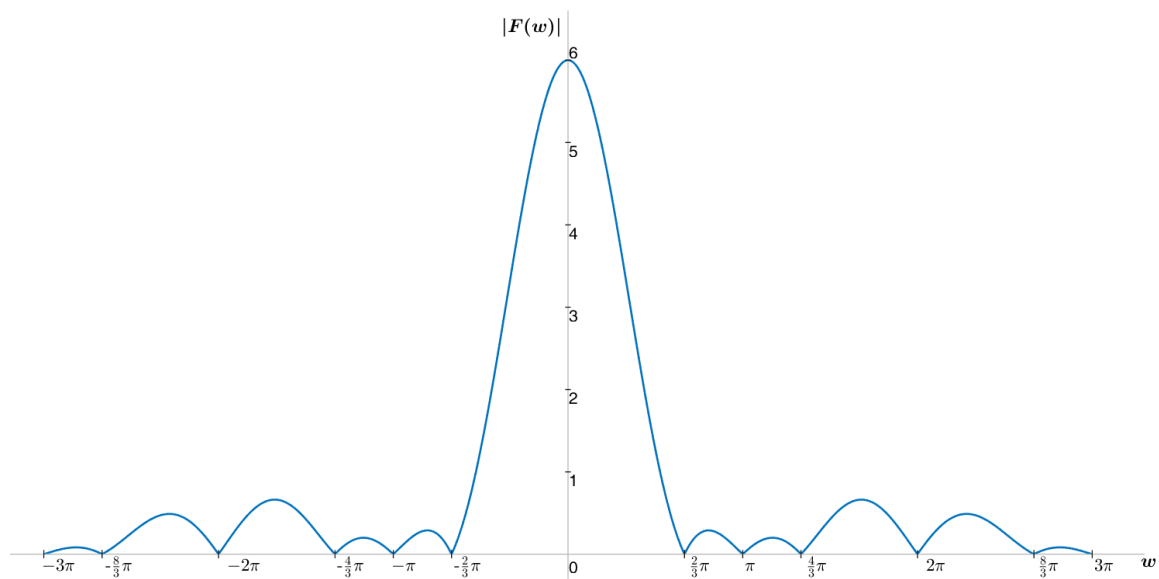
Spekter energijske gostote bo tako:

$$|F(w)|^2 = \frac{4}{w^2} (\sin w + 2 \sin w \cdot \cos w)^2$$

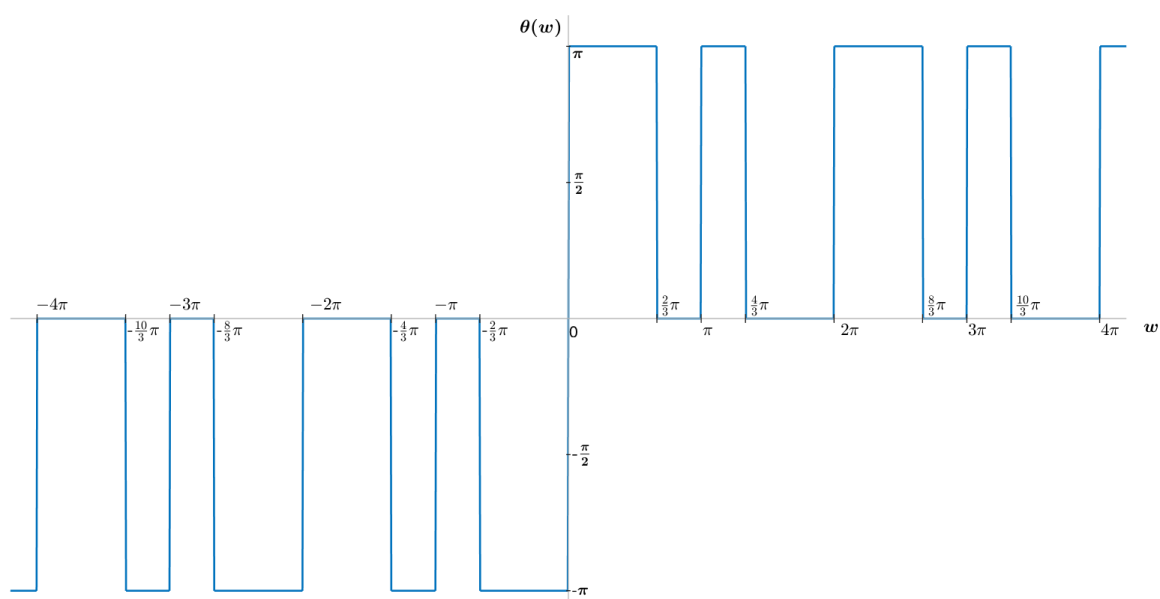
Z enačbo (5.6) izračunamo še fazni spekter (Slika 5.6):

$$\theta(w) = \begin{cases} \arctg \frac{D(w)}{C(w)}, & C(w) > 0 \\ \pm\pi + \arctg \frac{D(w)}{C(w)}, & C(w) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & C(w) > 0 \\ \pm\pi, & C(w) < 0 \end{cases}$$

Amplitudni in fazni spekter neperiodičnih signalov sta zvezni funkciji.



Slika 5.5: Grafični prikaz amplitudnega spektra neperiodičnega signala $f(t)$ na intervalu $w \in (-3\pi, 3\pi)$.

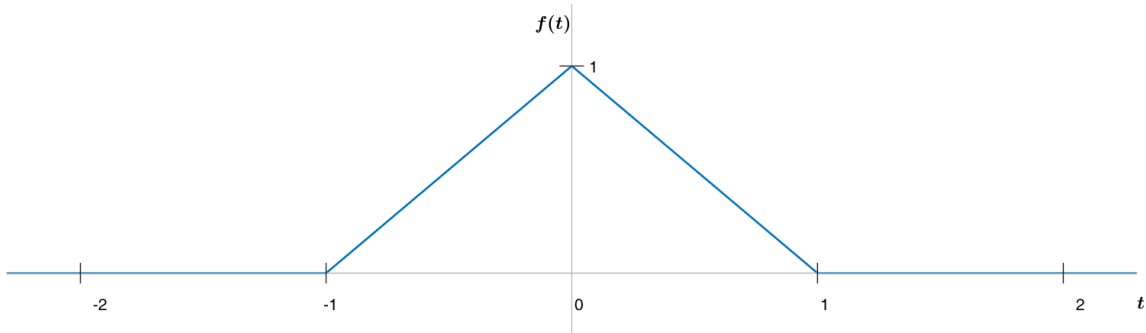


Slika 5.6: Grafični prikaz faznega spektra neperiodičnega signala $f(t)$ na intervalu $w \in (-4\pi, 4\pi)$.

2. Za podani neperiodični signal

$$f(t) = \begin{cases} t + 1, & -1 \leq t < 0 \\ 1 - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

ki je prikazan na Sliki 5.7 določi Fourierjevo transformacijo in izračunaj vrednost njegovega spektra amplitudne gostote in vrednost faznega spektra pri $w = \frac{3\pi}{4}$.



Slika 5.7: Grafični prikaz signala $f(t)$ na časovnem intervalu $(-2, 2)$.

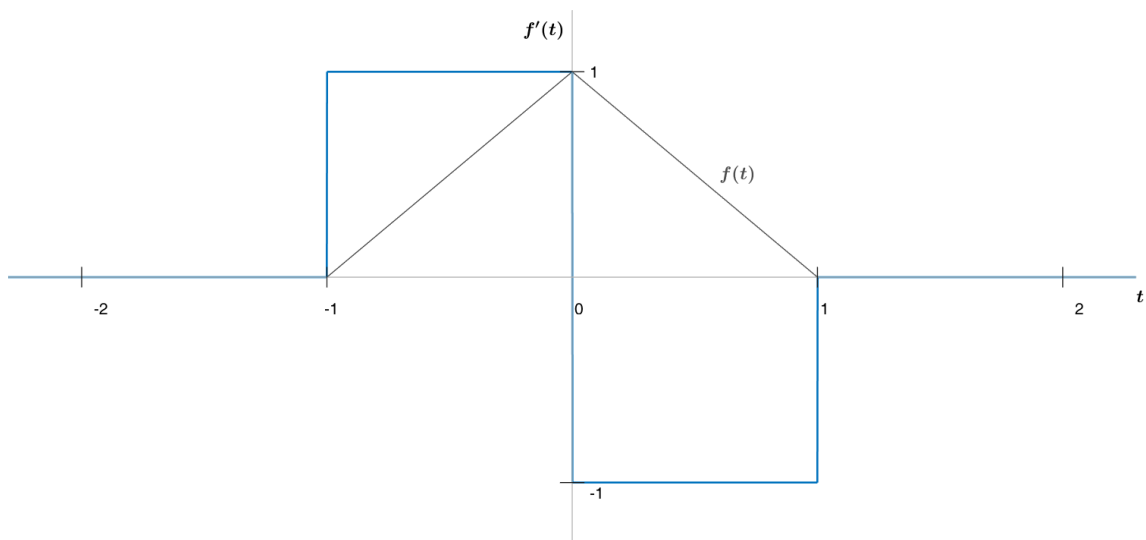
I. Uporaba osnovne definicije Fourierjeve transformacije

$$\begin{aligned} F(w) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-jwt} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{-jwt} dt + \int_{-1}^0 (t+1) \cdot e^{-jwt} dt + \int_0^1 (1-t) \cdot e^{-jwt} dt + \int_1^{\infty} 0 \cdot e^{-jwt} dt = \\ &= \int_{-1}^0 t \cdot e^{-jwt} dt + \int_{-1}^0 e^{-jwt} dt + \int_0^1 e^{-jwt} dt - \int_0^1 t \cdot e^{-jwt} dt = \\ &= \frac{-jwt - 1}{(-jw)^2} e^{-jwt} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{-jw} e^{-jwt} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{-jw} e^{-jwt} \Big|_0^1 + \frac{jw + 1}{(-jw)^2} e^{-jwt} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{(-jw)^2} - \frac{jw - 1}{(-jw)^2} e^{jw} + \cancel{\frac{1}{jw}} - \frac{1}{-jw} e^{jw} + \frac{1}{-jw} e^{-jw} - \cancel{\frac{1}{jw}} + \frac{jw + 1}{(-jw)^2} e^{-jw} - \frac{1}{(-jw)^2} = \\ &= -\frac{2}{(-jw)^2} + \left(-\frac{jw - 1}{(-jw)^2} - \frac{-jw}{(-jw)^2} \right) \cdot e^{jw} + \left(\frac{jw + 1}{(-jw)^2} + \frac{-jw}{(-jw)^2} \right) \cdot e^{-jw} = \\ &= -\frac{2}{(-jw)^2} + \frac{1}{(-jw)^2} \cdot e^{jw} + \frac{1}{(-jw)^2} \cdot e^{-jw} = \frac{2}{w^2} - \frac{1}{w^2} e^{jw} - \frac{1}{w^2} e^{-jw} = \\ &= \frac{2}{w^2} - \frac{1}{w^2} (\cos w + j \sin w + \cos w - j \sin w) = \frac{2}{w^2} - \frac{2}{w^2} \cos w = \frac{2}{w^2} (1 - \cos w) \end{aligned}$$

II. Odvajanje in uporaba tabele Fourierjevih transformacij nekaterih osnovnih funkcij

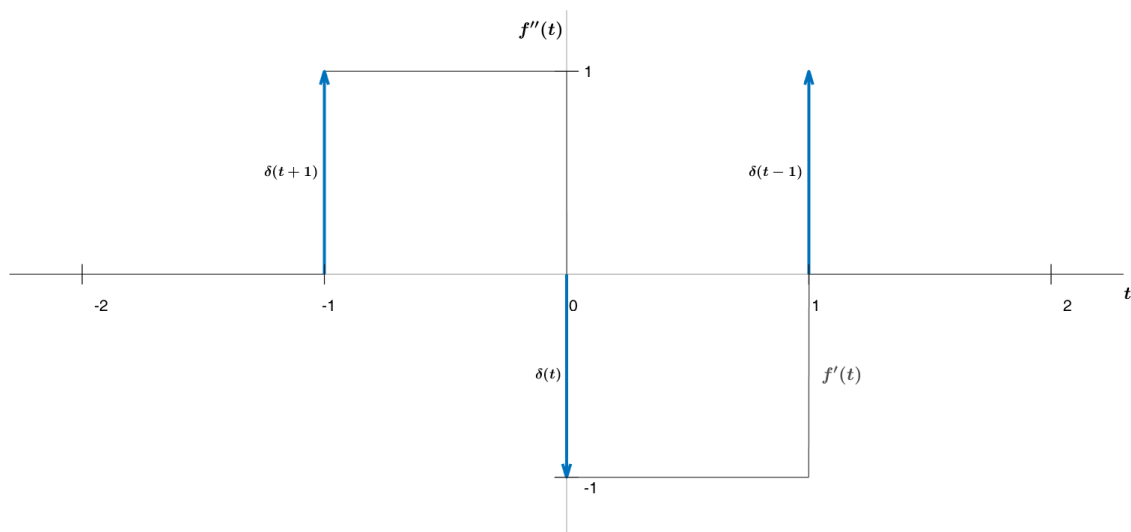
Najprej poiščemo prvi odvod signala $f(t)$ (Slika 5.8):

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 0 \\ -1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$



Slika 5.8: Grafični prikaz prvega odvoda $f'(t)$ neperiodičnega signala $f(t)$.

Še enkrat izvedemo operacijo odvajanja, da dobimo linearno kombinacijo delta impulzov (Slika 5.9):



Slika 5.9: Grafični prikaz drugega odvoda $f''(t)$ neperiodičnega signala $f(t)$.

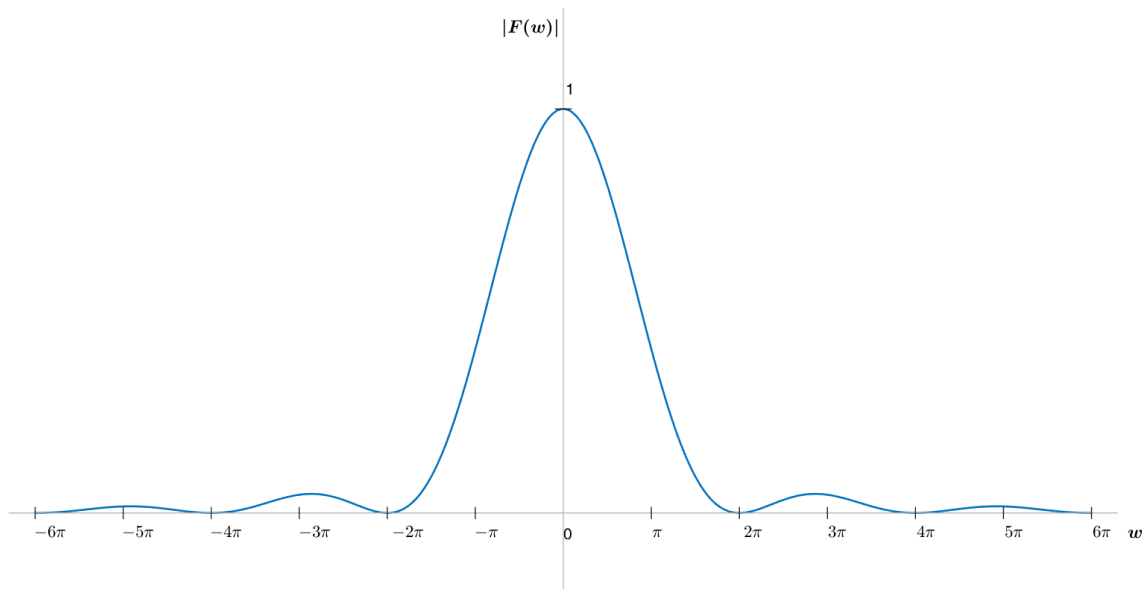
$$f''(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1) \quad \Big/ \quad \mathcal{F}$$

$$(jw)^2 \cdot F(w) = e^{jw} - 2 + e^{-jw}$$

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{1}{(jw)^2} (\cos w + j \sin w - 2 + \cos w - j \sin w) = \\ &= -\frac{1}{w^2} (2\cos w - 2) = \frac{2}{w^2} (1 - \cos w) \end{aligned}$$

S pomočjo enačbe (5.5) zapišemo amplitudni spekter signala (Slika 5.10):

$$|F(w)| = \left| \frac{2}{w^2} (1 - \cos w) \right| = \frac{2}{w^2} (1 - \cos w)$$



Slika 5.10: Grafični prikaz amplitudnega spektra neperiodičnega signala $f(t)$ na intervalu $w \in (-3\pi, 3\pi)$.

Ker je vrednost $\cos w \in [-1, 1]$, bo izraz v oklepajih $(1 - \cos w)$ vedno pozitiven. Spekter energijske gostote je:

$$|F(w)|^2 = \frac{4}{w^4} (1 - \cos w)^2$$

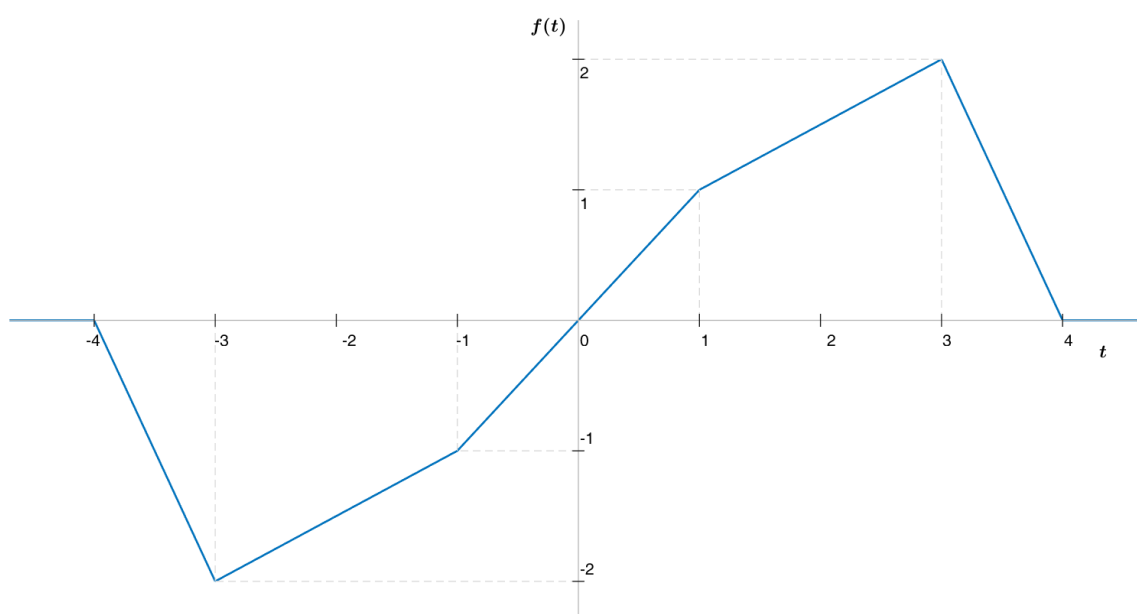
Signal $f(t)$ je sodi in zato njegov kompleksni spekter nima imaginarnega dela ($D(w) = 0$). Realni del kompleksnega spektra $C(w)$ pa je vedno pozitiven in zato bo fazni spekter signala enak 0 (enačba (5.6)):

$$\theta(w) = \arctg \frac{D(w)}{C(w)} = 0$$

3. Podan je neperiodični signal

$$f(t) = \begin{cases} -2t - 8, & -4 \leq t < -3 \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, & -3 \leq t < -1 \\ t, & -1 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, & 1 \leq t < 3 \\ -2t + 8, & 3 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

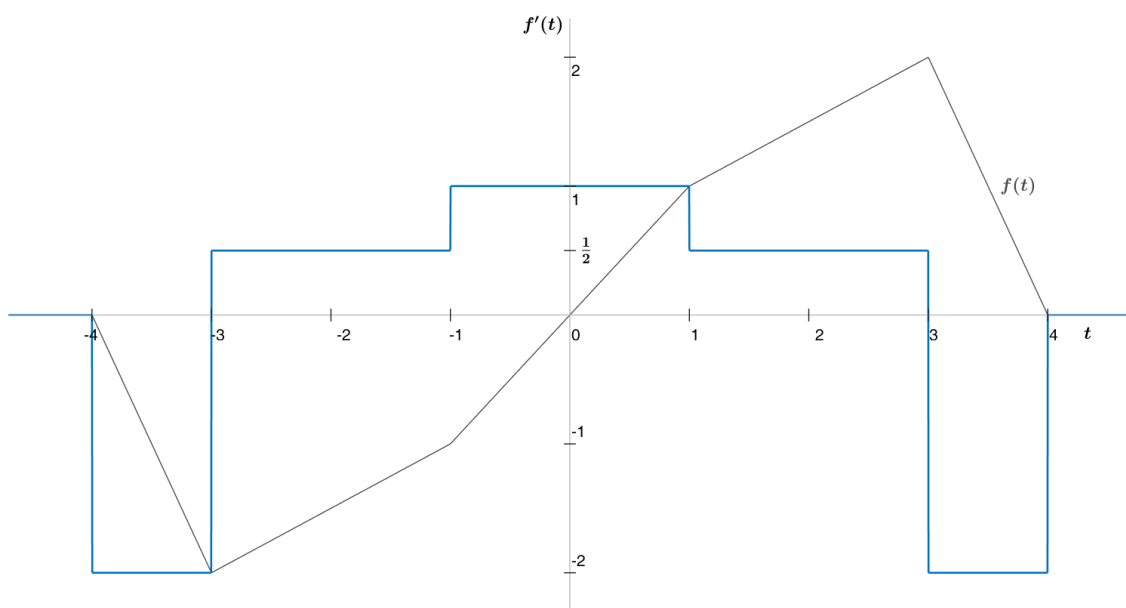
ki je prikazan na Sliki 5.11. Izračunaj kompleksni, amplitudni in fazni spekter signala $f(t)$.



Slika 5.11: Grafični prikaz signala $f(t)$ na časovnem intervalu $(-4, 4)$.

Tokrat bomo kompleksni spekter signala $f(t)$ poiskali samo z odvajanjem in uporabo tabele Fourierjevih transformacij. Poiščemo prvi odvod signala $f(t)$ (Slika 5.12):

$$f'(t) = \begin{cases} -2, & -4 \leq t < -3 \\ \frac{1}{2}, & -3 \leq t < -1 \\ 1, & -1 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq t < 3 \\ -2, & 3 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

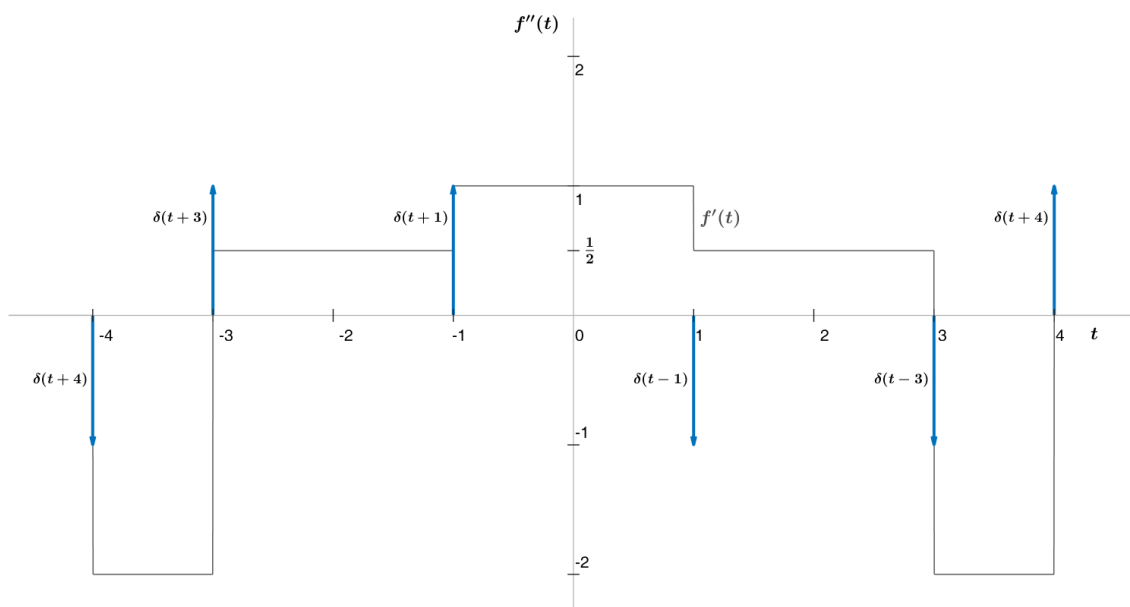


Slika 5.12: Grafični prikaz prvega odvoda $f'(t)$ neperiodičnega signala $f(t)$.

Poiščemo še drugega odvod funkcije (Slika 5.13):

$$f''(t) = -2\delta(t+4) + 2.5\delta(t+3) + 0.5\delta(t+1) - 0.5\delta(t-1) - 2.5\delta(t-3) + 2\delta(t-4) \quad \bigg/ \mathcal{F}$$

$$(jw)^2 F(w) = -2e^{4jw} + \frac{5}{2}e^{3jw} + \frac{1}{2}e^{jw} - \frac{1}{2}e^{-jw} - \frac{5}{2}e^{-3jw} + 2e^{-4jw}$$

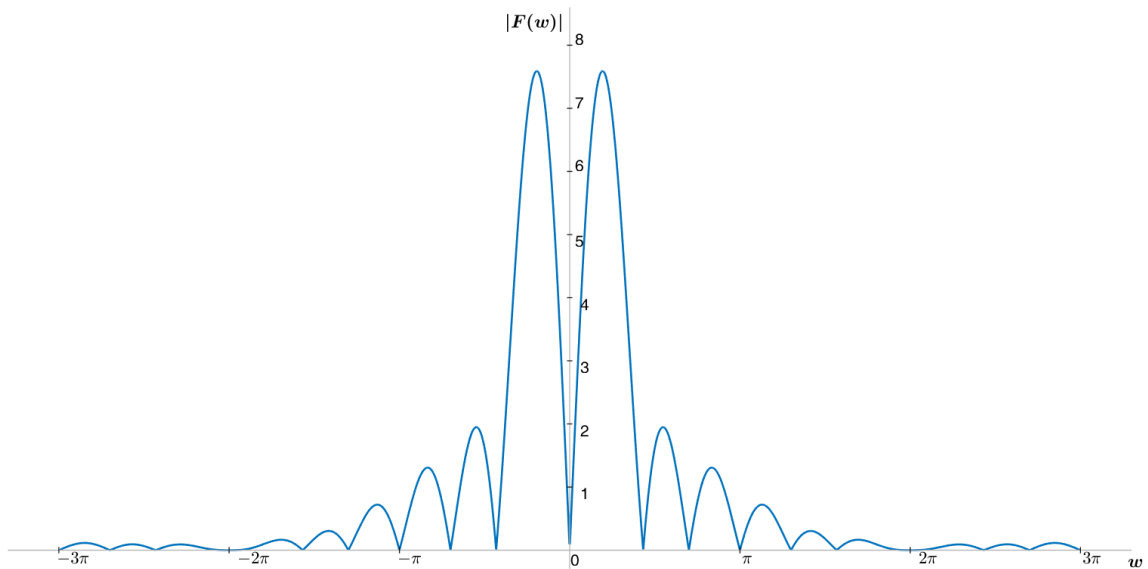


Slika 5.13: Grafični prikaz drugega odvoda $f''(t)$ neperiodičnega signala $f(t)$.

$$\begin{aligned}
F(w) &= \frac{1}{(jw)^2} \left(-2\cancel{\cos 4w} - 2j \sin 4w + \frac{5}{2}\cancel{\cos 3w} + \frac{5}{2}j \sin 3w + \frac{1}{2}\cancel{\cos w} + \frac{1}{2}j \sin w - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\cancel{\cos w} + \frac{1}{2}j \sin w - \frac{5}{2}\cancel{\cos 3w} + \frac{5}{2}j \sin 3w + 2\cancel{\cos 4w} - 2j \sin 4w \right) = \\
&= -\frac{1}{w^2} (-4j \sin 4w + 5j \sin 3w + j \sin w) = j \cdot \frac{1}{w^2} (4 \sin 4w - 5 \sin 3w - \sin w)
\end{aligned}$$

Z enačbo (5.5) zapišemo amplitudni spekter signala (Slika 5.14):

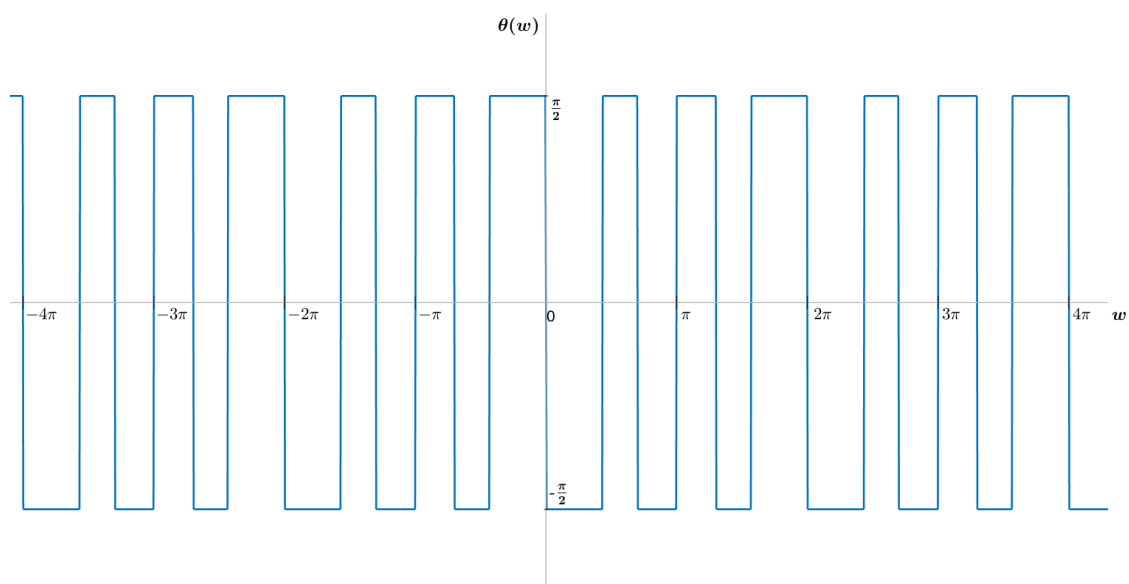
$$|F(w)| = \left| \frac{1}{w^2} (4 \sin 4w - 5 \sin 3w - \sin w) \right| = \frac{1}{w^2} \cdot \left| 4 \sin 4w - 5 \sin 3w - \sin w \right|$$



Slika 5.14: Grafični prikaz amplitudnega spektra neperiodičnega signala $f(t)$ na intervalu $w \in (-3\pi, 3\pi)$.

Signal $f(t)$ je lihi in zato je realni del njegovega kompleksnega spektra $C(w) = 0$. S pomočjo enačbe (5.6) zapišemo še fazni spekter signala (Slika 5.6):

$$\theta(w) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & D(w) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & D(w) < 0 \end{cases}$$



Slika 5.15: Grafični prikaz faznega spektra neperiodičnega signala $f(t)$ na intervalu $w \in (-4\pi, 4\pi)$.

Poglavje 6

Avtokorelacija, križna korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

6.1 Uvod

Avtokorelacija neperiodičnih signalov

Podobno kot pri periodičnih signalih, avtokorelacija poljubnega neperiodičnega signala $f(t)$ predstavlja korelacijo med signalom in njegovo časovno zamaknjeno kopijo $f(t - \tau)$. Avtokorelacijo $\varphi_{ii}(\tau)$ neperiodičnega signala izračunamo z naslednjo enačbo:

$$\varphi_{ii}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt \quad (6.1)$$

kjer je τ časovni premik kopije signala. Za avtokorelacijo velja Hermitova simetrija ($\phi_{11}(\tau) = \overline{\phi_{11}(-\tau)}$), kar pomeni, da je potek avtokorelacije povsem določen z njenimi vrednostmi na pozitivni (ali negativni) strani časovne osi.

Križna korelacija neperiodičnih signalov

Križno korelacijo med $f_i(t)$ in $f_j(t)$ predstavlja korelacijo med signalom $f_i(t)$ in časovno zamaknjenim signalom $f_j(t - \tau)$. Križno korelacijo $\varphi_{ij}(\tau)$ signalov s periodo T_0 izračunamo z naslednjo enačbo:

$$\varphi_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt \quad (6.2)$$

kjer je τ vrednost časovnega premika signala $f_j(t)$. Za križno korelacijo velja lastnost antisimetričnosti ($\varphi_{ji}(\tau) = \overline{\varphi_{ij}(-\tau)}$), zato pri njeni uporabi zadošča, da izračunamo le $\varphi_{ij}(\tau)$ ali $\varphi_{ji}(\tau)$.

Konvolucija neperiodičnih signalov

Konvolucija signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ je definirana podobno kot križna korelacija, uporablja pa se za modifikacijo signalov. Konvolucijo $\rho_{ij}(\tau)$ signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ izračunamo z naslednjo enačbo:

$$\rho_{ij}(\tau) = f_i(t) * f_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_j(\tau - t) dt \quad (6.3)$$

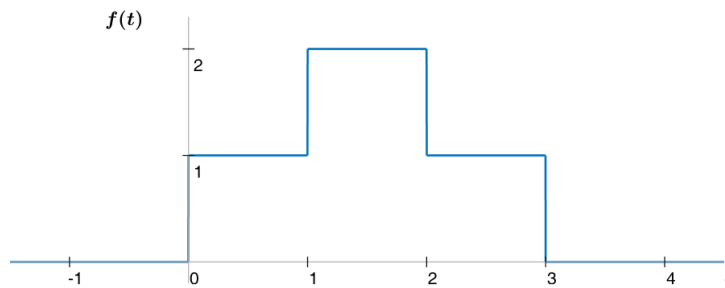
kjer je τ vrednost časovnega premika signala $f_j(-t)$. Konvolucija dveh neperiodičnih signalov je simetrična ($\rho_{ji}(\tau) = \rho_{ij}(\tau)$) in zato velja zakon o komutativnosti $f_i(t) * f_j(t) = f_j(t) * f_i(t)$.

6.2 Naloge

1. Določi avtokorelacijo $\varphi_{11}(\tau)$ in moč signala

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

ki je prikazan na Sliki 6.1.



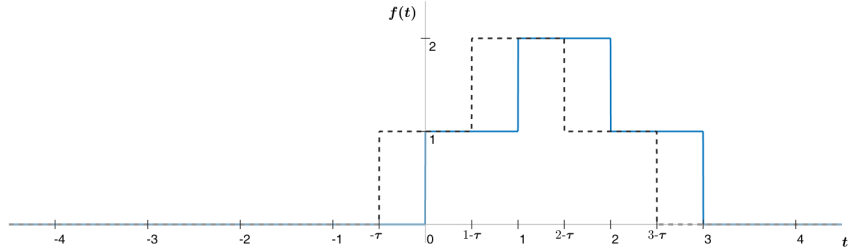
Slika 6.1: Grafični prikaz signala $f_1(t)$.

V skladu z enačbo (6.1) avtokorelacijo φ_{11} računamo s premikanjem kopije signala $f_1(t)$ za različne vrednosti τ . Najprej bomo izračunali avtokorelacijo za pozitivne vrednosti τ :

$0 < \tau \leq 1$ (Slika 6.2):

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt = \\ &= \int_0^{1-\tau} 1 \cdot 1 dt + \int_{1-\tau}^1 1 \cdot 2 dt + \int_1^{2-\tau} 2 \cdot 2 dt + \int_{2-\tau}^2 2 \cdot 1 dt + \int_2^{3-\tau} 1 \cdot 1 dt = \end{aligned}$$

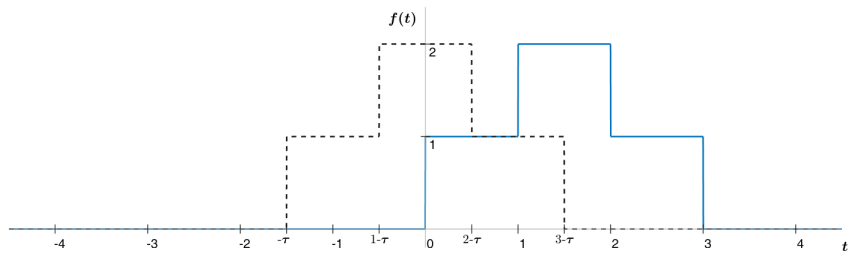
$$\begin{aligned}
&= t \Big|_0^{1-\tau} + 2t \Big|_{1-\tau}^1 + 4t \Big|_1^{2-\tau} + 2t \Big|_{2-\tau}^2 + t \Big|_2^{3-\tau} = \\
&= 1 - \tau + 2 - 2 + 2\tau + 8 - 4\tau - 4 + 4 - 4 + 2\tau + 3 - \tau - 2 = 6 - 2\tau
\end{aligned}$$



Slika 6.2: Prekrivanje signala $f_1(t)$ v območju $0 < \tau \leq 1$.

$1 < \tau \leq 2$ (Slika 6.3):

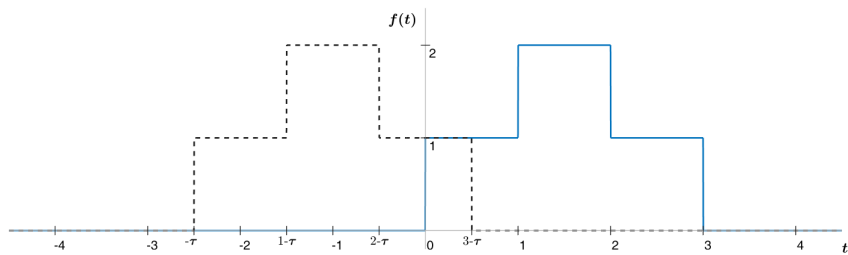
$$\begin{aligned}
\varphi_{11}(\tau) &= \int_0^{2-\tau} 1 \cdot 2 \, dt + \int_{2-\tau}^1 1 \cdot 1 \, dt + \int_1^{3-\tau} 2 \cdot 1 \, dt = 2t \Big|_0^{2-\tau} + t \Big|_{2-\tau}^1 + 2t \Big|_1^{3-\tau} = \\
&= 4 - 2\tau + 1 - 2 + \tau + 6 - 2\tau - 2 = 7 - 3\tau
\end{aligned}$$



Slika 6.3: Prekrivanje signala $f_1(t)$ v območju $1 < \tau \leq 2$.

$2 < \tau \leq 3$ (Slika 6.4):

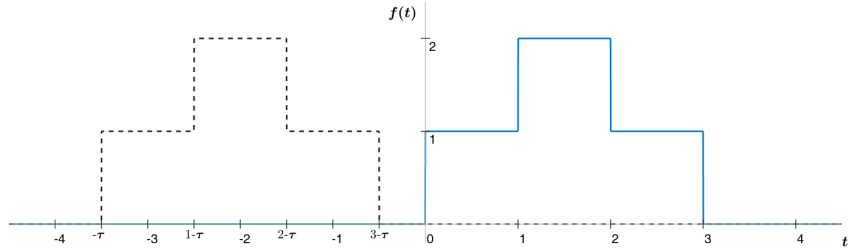
$$\varphi_{11}(\tau) = \int_0^{3-\tau} 1 \cdot 1 \, dt = t \Big|_0^{3-\tau} = 3 - \tau$$



Slika 6.4: Prekrivanje signala $f_1(t)$ v območju $2 < \tau \leq 3$.

$\tau > 3$ (Slika 6.5):

$$\varphi_{11}(\tau) = 0$$



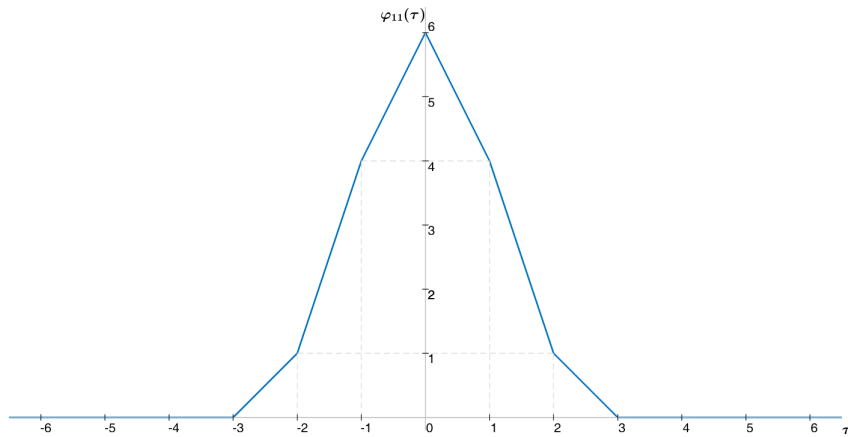
Slika 6.5: Prekrivanje signala $f_1(t)$ za $\tau > 3$.

Avtokorelacija $\varphi_{11}(\tau)$ signala $f_1(t)$ (Slika 6.6) je torej

$$\varphi_{11}(\tau) = \begin{cases} 6 - 2\tau, & 0 < \tau \leq 1 \\ 7 - 3\tau, & 1 < \tau \leq 2 \\ 3 - \tau, & 2 < \tau \leq 3 \\ \varphi_{11} = 0, & \tau > 3 \end{cases}$$

Avtokorelacija je soda funkcija ($\varphi_{11}(-\tau) = \varphi_{11}(\tau)$) in zato z določitvijo poteka avtokorelacije za pozitivne vrednosti τ posredno določimo tudi potek za negativne vrednosti τ (Slika 6.6):

$$\varphi_{11}(-\tau) = \begin{cases} 6 + 2\tau, & 0 < \tau \leq 1 \\ 7 + 3\tau, & 1 < \tau \leq 2 \\ 3 + \tau, & 2 < \tau \leq 3 \\ \varphi_{11} = 0, & \tau > 3 \end{cases}$$



Slika 6.6: Potek avtokorelacije $\varphi_{11}(\tau)$ signala $f_1(t)$.

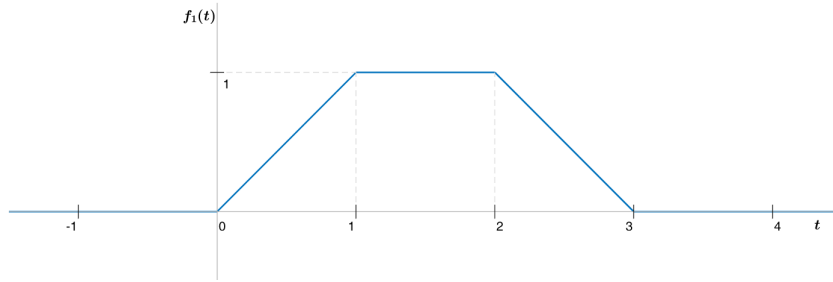
Moč signala $f_1(t)$ je enaka vrednosti avtokorelacije tega signala v točki $\tau = 0$:

$$P_{f_1} = \varphi_{11}(0) = 6$$

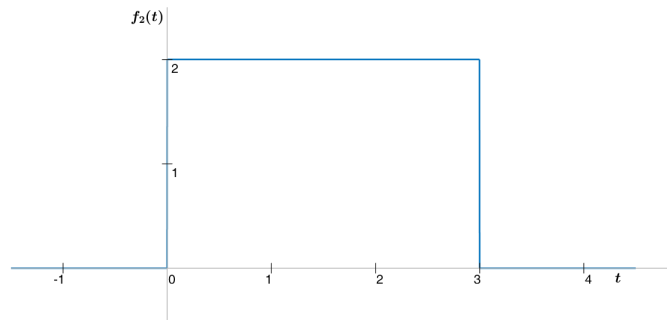
2. Določite križni korelaciji $\varphi_{12}(\tau)$ in $\varphi_{21}(\tau)$ podanih dveh neperiodičnih signalov

$$f_1(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 2 \\ 3-t, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

ki sta prikazana na Slikah 6.7 in 6.8.



Slika 6.7: Grafični prikaz signala $f_1(t)$.



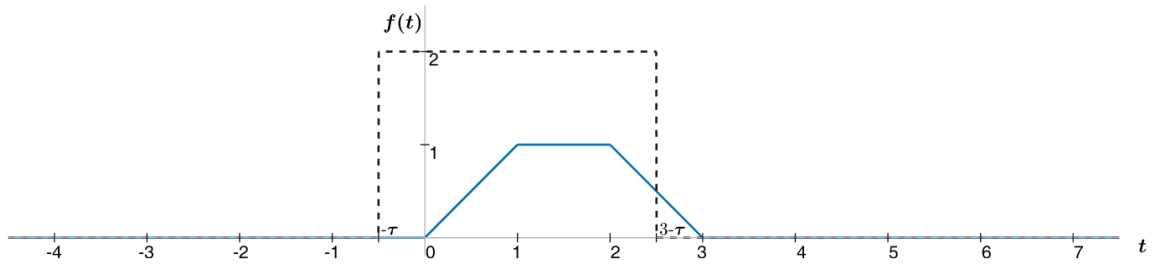
Slika 6.8: Grafični prikaz signala $f_2(t)$.

Najprej bomo določili potek križne korelacije $\varphi_{12}(\tau)$ za $\tau > 0$:

$0 < \tau \leq 1$ (Slika 6.9):

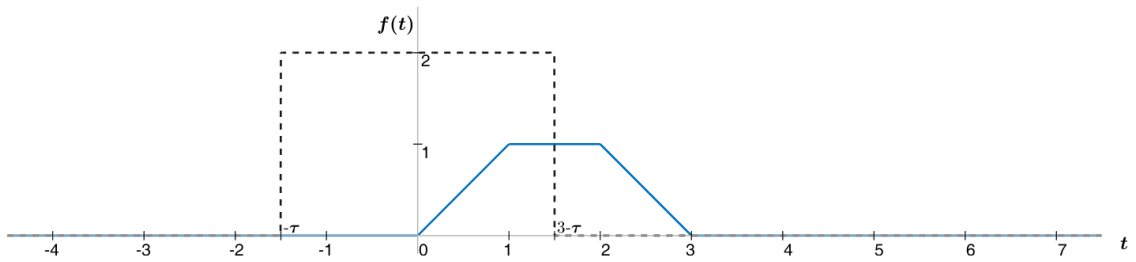
$$\begin{aligned} \varphi_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau) dt = \int_0^1 t \cdot 2 dt + \int_1^2 1 \cdot 2 dt + \int_2^{3-\tau} (3-t) \cdot 2 dt = \\ &= 2 \int_0^1 t dt + 2 \int_1^2 dt + 6 \int_2^{3-\tau} dt - 2 \int_2^{3-\tau} t dt = 2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + 2t \Big|_1^2 + 6t \Big|_2^{3-\tau} - 2 \frac{t^2}{2} \Big|_2^{3-\tau} = \\ &= 1 + 4 - 2 + 18 - 6\tau - 12 - 9 + 6\tau - \tau^2 + 4 = -\tau^2 + 4 \end{aligned}$$

$1 < \tau \leq 2$ (Slika 6.10):



Slika 6.9: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $0 < \tau \leq 1$.

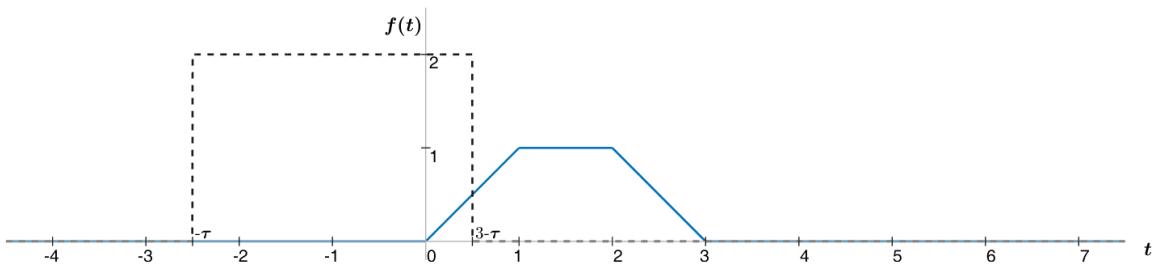
$$\begin{aligned}\varphi_{12}(\tau) &= \int_0^1 t \cdot 2 \, dt + \int_1^{3-\tau} 1 \cdot 2 \, dt = 2 \int_0^1 t \, dt + 2 \int_1^{3-\tau} dt = 2 \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 + 2t \Big|_1^{3-\tau} = \\ &= 1 + 6 - 2\tau - 2 = 5 - 2\tau\end{aligned}$$



Slika 6.10: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $1 < \tau \leq 2$.

$2 < \tau \leq 3$ (Slika 6.11):

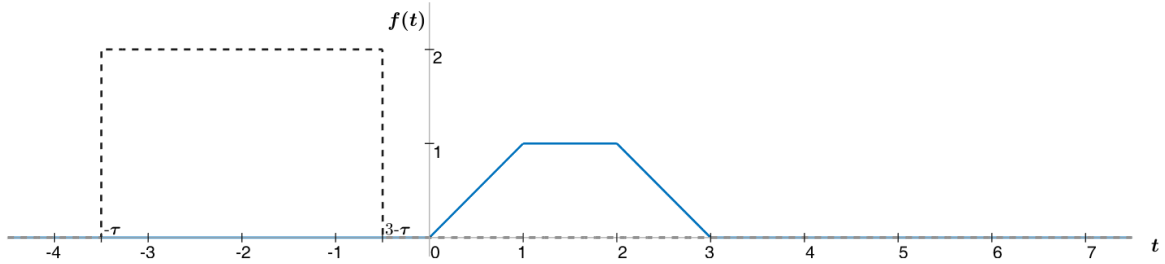
$$\varphi_{12}(\tau) = \int_0^{3-\tau} t \cdot 2 \, dt = 2 \int_0^{3-\tau} t \, dt = 2 \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{3-\tau} = 9 - 6\tau + \tau^2$$



Slika 6.11: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $2 < \tau \leq 3$.

$\tau > 3$ (Slika 6.12):

$$\varphi_{12}(\tau) = 0$$

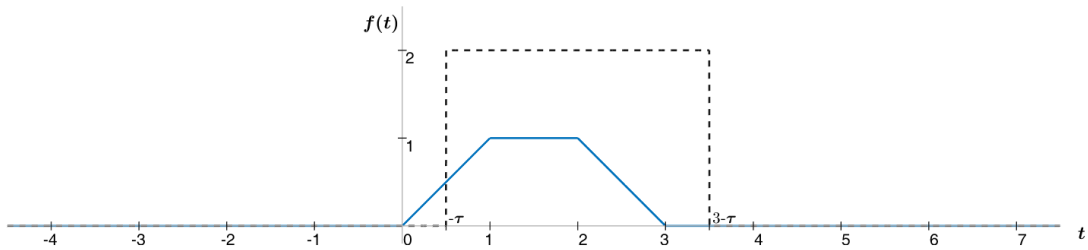


Slika 6.12: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $\tau > 3$.

Določimo še potek križne korelacije $\varphi_{12}(\tau)$ za $\tau < 0$:

$-1 \leq \tau < 0$ (Slika 6.13):

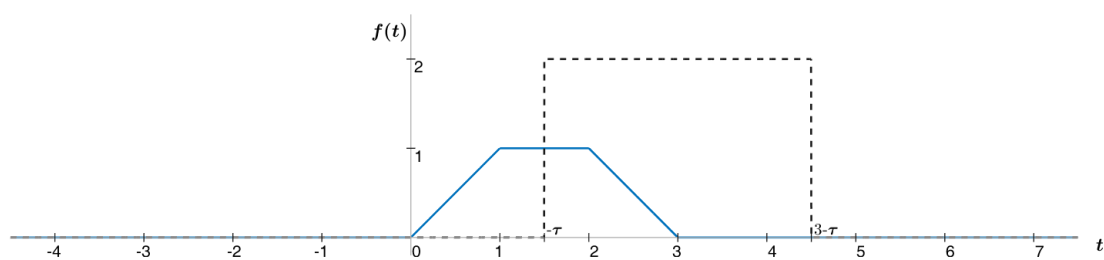
$$\begin{aligned}\varphi_{12}(\tau) &= \int_{-\tau}^1 t \cdot 2 \, dt + \int_1^2 1 \cdot 2 \, dt + \int_2^3 (3-t) \cdot 2 \, dt = \\ &= 2 \int_{-\tau}^1 t \, dt + 2 \int_1^2 dt + 6 \int_2^3 dt - 2 \int_2^3 t \, dt = 2 \left. \frac{t^2}{2} \right|_{-\tau}^1 + 2t \Big|_1^2 + 6t \Big|_2^3 - 2 \left. \frac{t^2}{2} \right|_2^3 = \\ &= 1 - \tau^2 + 4 - 2 + 18 - 12 - 9 + 4 = -\tau^2 + 4\end{aligned}$$



Slika 6.13: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $-1 \leq \tau < 0$.

$-2 \leq \tau < -1$ (Slika 6.14):

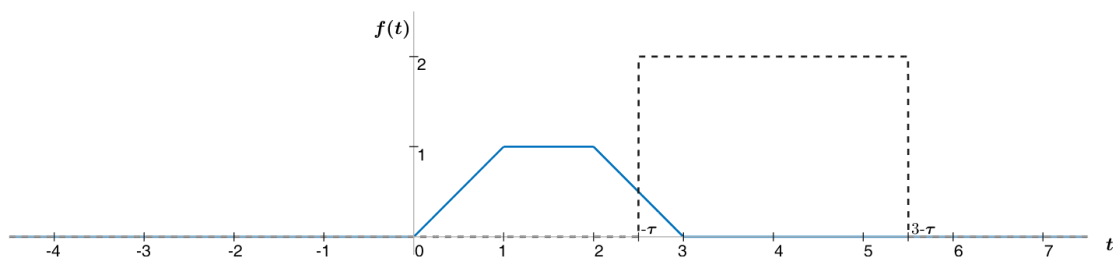
$$\begin{aligned}\varphi_{12}(\tau) &= \int_{-\tau}^2 1 \cdot 2 \, dt + \int_2^3 (3-t) \cdot 2 \, dt = 2 \int_{-\tau}^2 dt + 6 \int_2^3 dt - 2 \int_2^3 t \, dt = 2t \Big|_{-\tau}^2 + 6t \Big|_2^3 - 2 \left. \frac{t^2}{2} \right|_2^3 = \\ &= 4 + 2\tau + 18 - 12 - 9 + 4 - 2 = 5 + 2\tau\end{aligned}$$



Slika 6.14: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $-2 \leq \tau < -1$.

$-3 \leq \tau < -2$ (Slika 6.15):

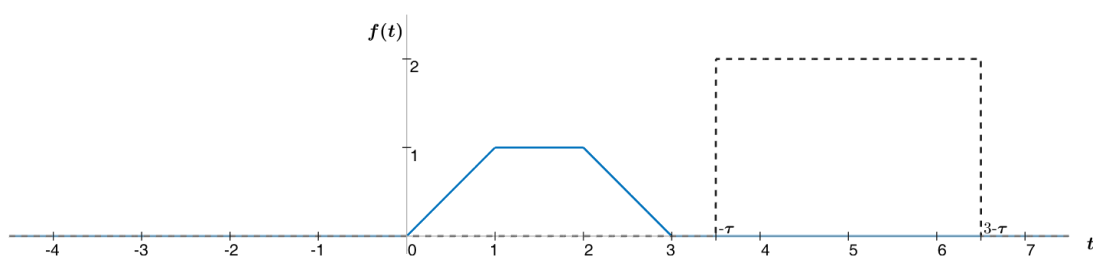
$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\tau}^3 (3-t) \cdot 2 \, dt = 6 \int_{-\tau}^3 dt - 2 \int_{-\tau}^3 t \, dt = 6t \Big|_{-\tau}^3 - 2 \frac{t^2}{2} \Big|_{-\tau}^3 = 18 + 6\tau - 9 - \tau^2 = 9 + 6\tau + \tau^2$$



Slika 6.15: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $-3 \leq \tau < -2$.

$\tau < -3$ (Slika 6.16):

$$\varphi_{12}(\tau) = 0$$

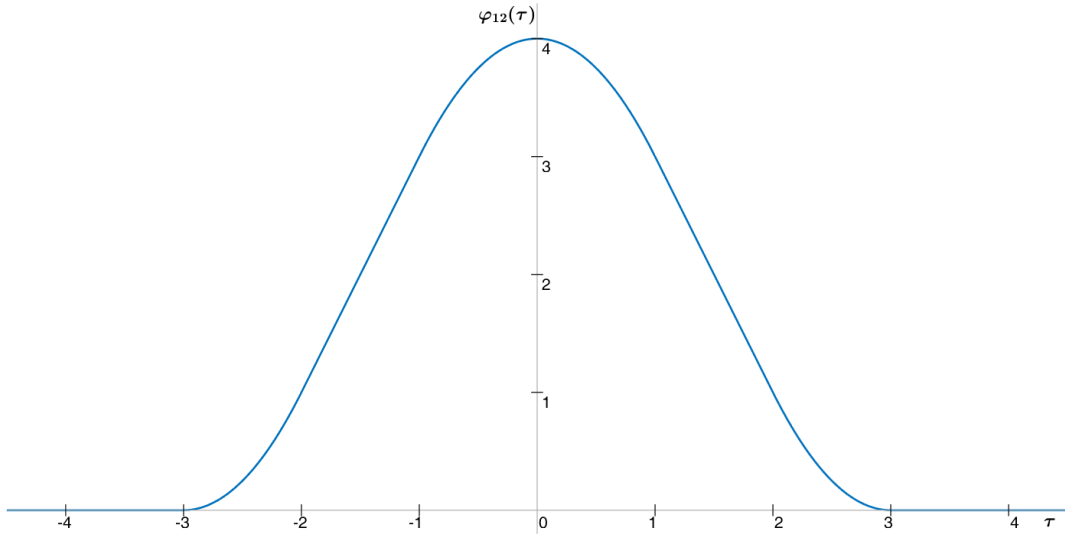


Slika 6.16: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $\tau < -3$.

Križna korelacija φ_{12} je torej:

$$\varphi_{12}(\tau) = \begin{cases} -\tau^2 + 4, & 0 < \tau \leq 1 \\ 5 - 2\tau, & 1 < \tau \leq 2 \\ 9 - 6\tau + \tau^2, & 2 < \tau \leq 3 \\ 0, & \tau > 3 \\ -\tau^2 + 4, & -1 \leq \tau < 0 \\ 5 + 2\tau, & -2 \leq \tau < -1 \\ 9 + 6\tau + \tau^2, & -3 \leq \tau < -2 \\ 0, & \tau < -3 \end{cases}$$

Grafični prikaz križne korelacije φ_{12} je podan na Sliki 6.17.



Slika 6.17: Grafični prikaz križne korelacije φ_{12} signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$.

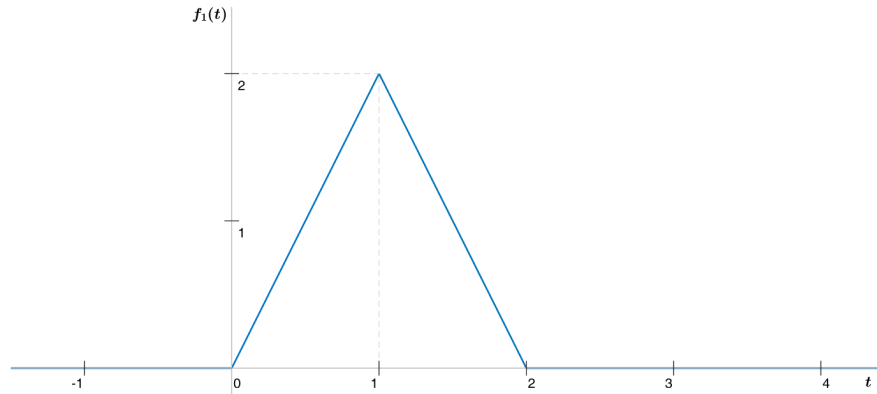
Križno korelacijo φ_{21} bomo določili s pomočjo lastnosti križnih korelacij. Za križne korelacije vemo, da so antisimetrične ($\varphi_{ij}(\tau) = \overline{\varphi_{ji}(-\tau)}$). Posledično:

$$\varphi_{21}(\tau) = \varphi_{12}(-\tau) = \begin{cases} -(-\tau)^2 + 4, & 0 < (-\tau) \leq 1 \\ 5 - 2(-\tau), & 1 < (-\tau) \leq 2 \\ 9 - 6(-\tau) + (-\tau)^2, & 2 < (-\tau) \leq 3 \\ 0, & (-\tau) > 3 \\ -(-\tau)^2 + 4, & -1 \leq (-\tau) < 0 \\ 5 + 2(-\tau), & -2 \leq (-\tau) < -1 \\ 9 + 6(-\tau) + (-\tau)^2, & -3 \leq (-\tau) < -2 \\ 0, & (-\tau) < -3 \end{cases} = \begin{cases} -\tau^2 + 4, & -1 \leq \tau < 0 \\ 5 + 2\tau, & -2 \leq \tau < -1 \\ 9 + 6\tau + \tau^2, & -3 \leq \tau < -2 \\ 0, & \tau < -3 \\ -\tau^2 + 4, & 0 < \tau \leq 1 \\ 5 - 2\tau, & 1 < \tau \leq 2 \\ 9 - 6\tau + \tau^2, & 2 < \tau \leq 3 \\ 0, & \tau > 3 \end{cases}$$

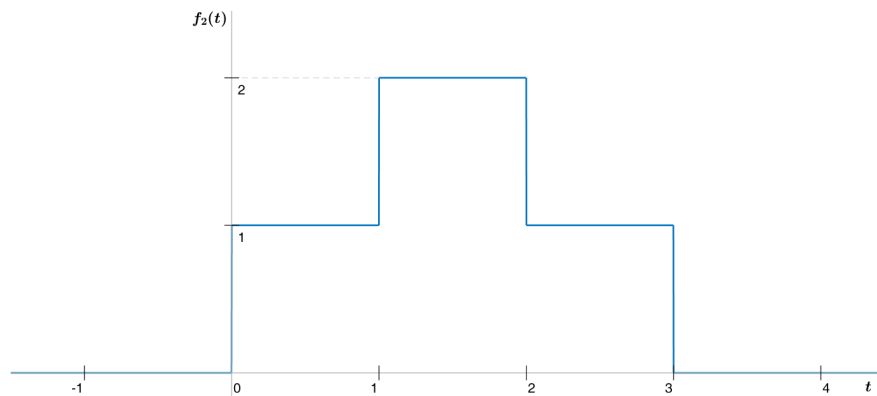
3. Določite križni korelaciji $\varphi_{12}(\tau)$ in $\varphi_{21}(\tau)$ podanih dveh neperiodičnih signalov

$$f_1(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < 1 \\ -2t + 4, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

ki sta prikazana na Slikah 6.18 in 6.19.



Slika 6.18: Grafični prikaz signala $f_1(t)$.

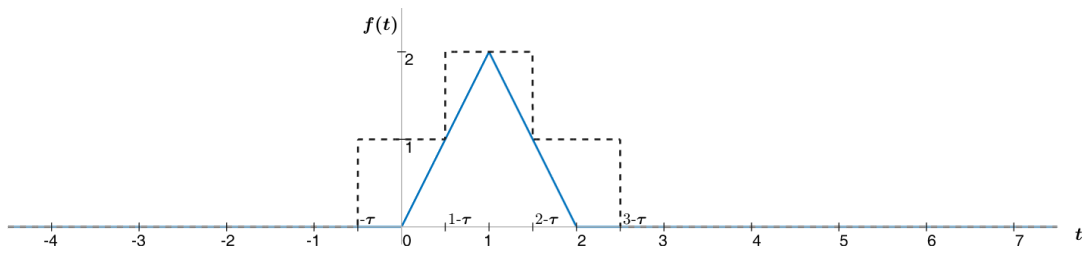


Slika 6.19: Grafični prikaz signala $f_2(t)$.

Najprej bomo določili potek križne korelacije $\varphi_{12}(\tau)$ za $\tau > 0$:

$0 < \tau \leq 1$ (Slika 6.20):

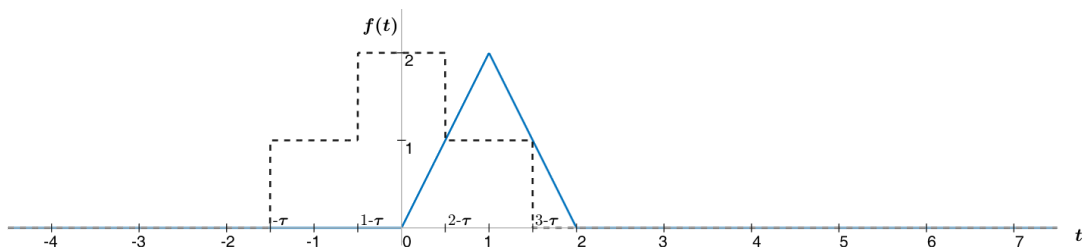
$$\begin{aligned} \varphi_{12}(\tau) &= \int_0^{1-\tau} 2t \cdot 1 \, dt + \int_{1-\tau}^1 2t \cdot 2 \, dt + \int_1^{2-\tau} (-2t + 4) \cdot 2 \, dt + \int_{2-\tau}^2 (-2t + 4) \cdot 1 \, dt = \\ &= 2 \int_0^{1-\tau} t \, dt + 4 \int_{1-\tau}^1 t \, dt + -4 \int_1^{2-\tau} t \, dt + 8 \int_1^{2-\tau} dt - 2 \int_{2-\tau}^2 t \, dt + 4 \int_{2-\tau}^2 dt = \\ &= 2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{1-\tau} + 4 \frac{t^2}{2} \Big|_{1-\tau}^1 + -4 \frac{t^2}{2} \Big|_1^{2-\tau} + 8t \Big|_1^{2-\tau} - 2 \frac{t^2}{2} \Big|_{2-\tau}^2 + 4t \Big|_{2-\tau}^2 = \\ &= 1 - 2\tau + \tau^2 + 2 - 2 + 4\tau - 2\tau^2 - 8 + 8\tau - 2\tau^2 + 2 + 16 - 8\tau - 8 - 4 + 4 - 4\tau + \tau^2 + 8 - 8 + 4\tau = 3 + 2\tau - 2\tau^2 \end{aligned}$$



Slika 6.20: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $0 < \tau \leq 1$.

$1 < \tau \leq 2$ (Slika 6.21):

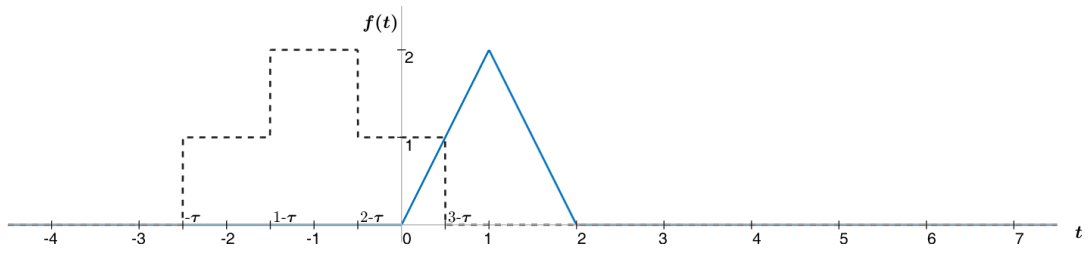
$$\begin{aligned}
 \varphi_{12}(\tau) &= \int_0^{2-\tau} 2t \cdot 2 \, dt + \int_{2-\tau}^1 2t \cdot 1 \, dt + \int_1^{3-\tau} (-2t + 4) \cdot 1 \, dt = \\
 &= 4 \int_0^{2-\tau} t \, dt + 2 \int_{2-\tau}^1 t \, dt - 2 \int_1^{3-\tau} t \, dt + 4 \int_1^{3-\tau} dt = \\
 &= 4 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2-\tau} + 2 \frac{t^2}{2} \Big|_{2-\tau}^1 - 2 \frac{t^2}{2} \Big|_1^{3-\tau} + 4t \Big|_1^{3-\tau} = \\
 &= 8 - 8\tau + 2\tau^2 + 1 - 4 + 4\tau - \tau^2 - 9 + 6\tau - \tau^2 + 1 + 12 - 4\tau - 4 = 5 - 2\tau
 \end{aligned}$$



Slika 6.21: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $1 < \tau \leq 2$.

$2 < \tau \leq 3$ (Slika 6.22):

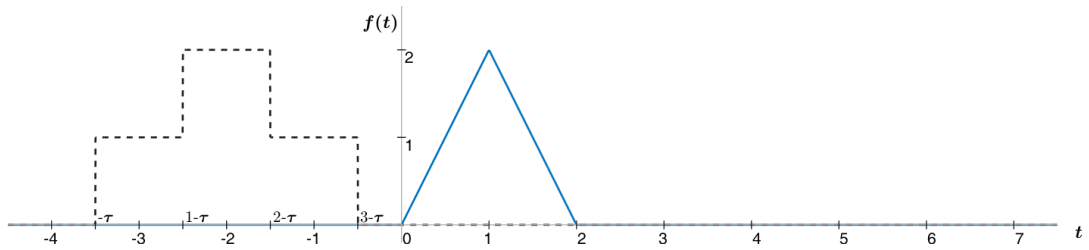
$$\varphi_{12}(\tau) = \int_0^{3-\tau} 2t \cdot 1 \, dt = 2 \int_0^{3-\tau} t \, dt = 2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{3-\tau} = 9 - 6\tau + \tau^2$$



Slika 6.22: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $2 < \tau \leq 3$.

$\tau > 3$ (Slika 6.23):

$$\varphi_{12}(\tau) = 0$$

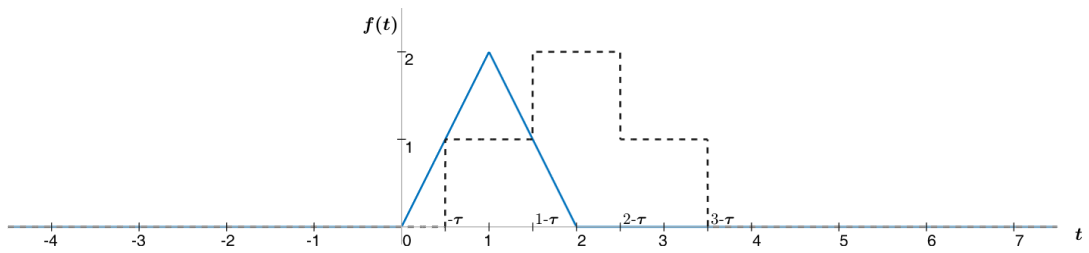


Slika 6.23: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $\tau > 3$.

Določimo še potek križne korelacije $\varphi_{12}(\tau)$ za $\tau < 0$:

$-1 \leq \tau < 0$ (Slika 6.24):

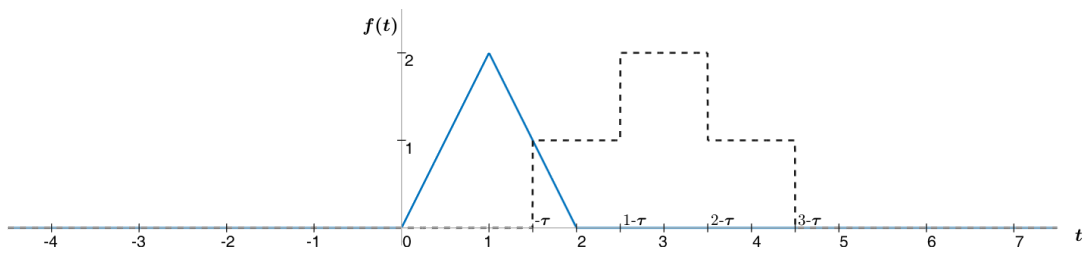
$$\begin{aligned} \varphi_{12}(\tau) &= \int_{-\tau}^1 2t \cdot 1 \, dt + \int_1^{1-\tau} (-2t + 4) \cdot 1 \, dt + \int_{1-\tau}^2 (-2t + 4) \cdot 2 \, dt = \\ &= 2 \int_{-\tau}^1 t \, dt - 2 \int_1^{1-\tau} t \, dt + 4 \int_1^{1-\tau} dt - 4 \int_{1-\tau}^2 t \, dt + 8 \int_{1-\tau}^2 dt = \\ &= 2 \frac{t^2}{2} \Big|_{-\tau}^1 - 2 \frac{t^2}{2} \Big|_1^{1-\tau} + 4t \Big|_1^{1-\tau} - 4 \frac{t^2}{2} \Big|_{1-\tau}^2 + 8t \Big|_{1-\tau}^2 = \\ &= 1 - \tau^2 - 1 + 2\tau - \tau^2 + 1 + 4 - 4\tau - 4 - 8 + 2 - 4\tau + 2\tau^2 + 16 - 8 + 8\tau = 3 + 2\tau \end{aligned}$$



Slika 6.24: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $-1 \leq \tau < 0$.

$-2 \leq \tau < -1$ (Slika 6.25):

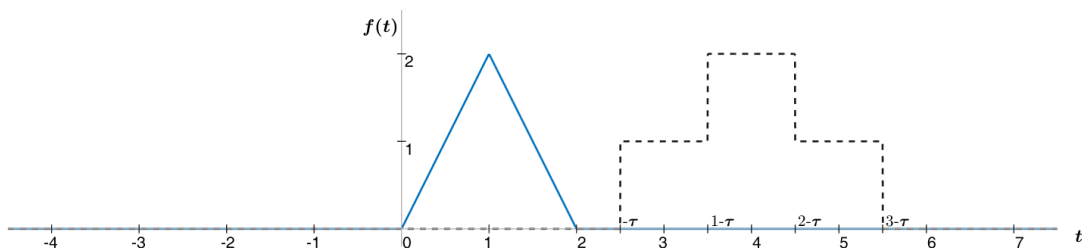
$$\begin{aligned} \varphi_{12}(\tau) &= \int_{-\tau}^2 (-2t + 4) \cdot 1 \, dt = -2 \int_{-\tau}^2 t \, dt + 4 \int_{-\tau}^2 dt = -2 \frac{t^2}{2} \Big|_{-\tau}^2 + 4t \Big|_{-\tau}^2 = \\ &= -4 + \tau^2 + 8 + 4\tau = 4 + 4\tau + \tau^2 \end{aligned}$$



Slika 6.25: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $-2 \leq \tau < -1$.

$\tau < -2$ (Slika 6.26):

$$\varphi_{12}(\tau) = 0$$

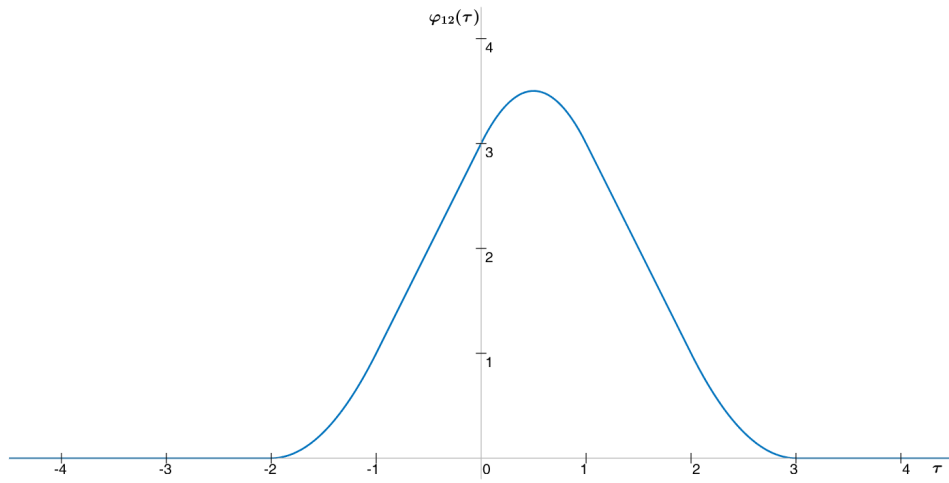


Slika 6.26: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$ za $\tau < -2$.

Križna korelacija φ_{12} je torej:

$$\varphi_{12}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -2 \\ 4 + 4\tau + \tau^2, & -2 \leq \tau < -1 \\ 3 + 2\tau, & -1 \leq \tau < 0 \\ 3 + 2\tau - 2\tau^2, & 0 < \tau \leq 1 \\ 5 - 2\tau, & 1 < \tau \leq 2 \\ 9 - 6\tau + \tau^2, & 2 < \tau \leq 3 \\ 0, & \tau > 3 \end{cases}$$

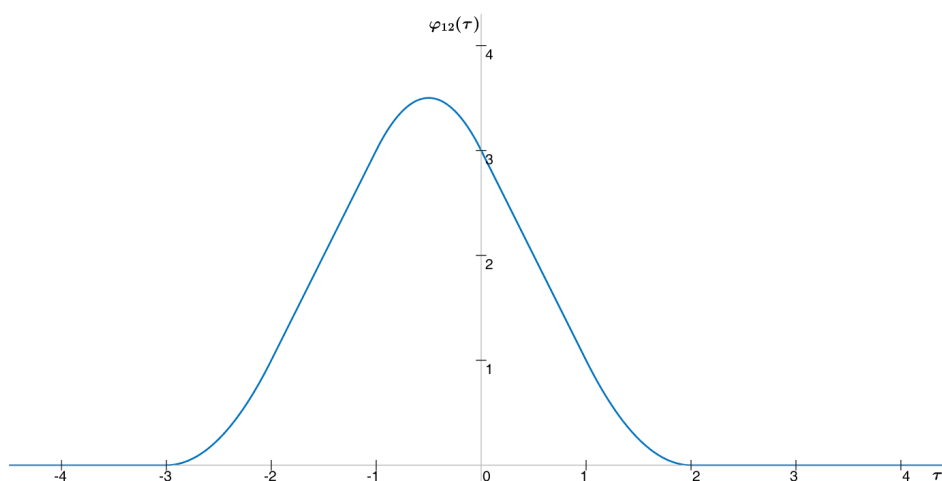
Grafični prikaz križne korelacije φ_{12} je podan na Sliki 6.27.



Slika 6.27: Grafični prikaz križne korelacije φ_{12} signalov $f_1(t)$ in $f_2(t + \tau)$.

Križna korelacija φ_{21} (Slika 6.28) je:

$$\varphi_{21}(\tau) = \varphi_{12}(-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 2 \\ 4 - 4\tau + \tau^2, & 1 < \tau \leq 2 \\ 3 - 2\tau, & 0 < \tau \leq 1 \\ 3 - 2\tau - 2\tau^2, & -1 \leq \tau < 0 \\ 5 + 2\tau, & -2 \leq \tau < -1 \\ 9 + 6\tau + \tau^2, & -3 \leq \tau < -2 \\ 0, & \tau < -3 \end{cases}$$

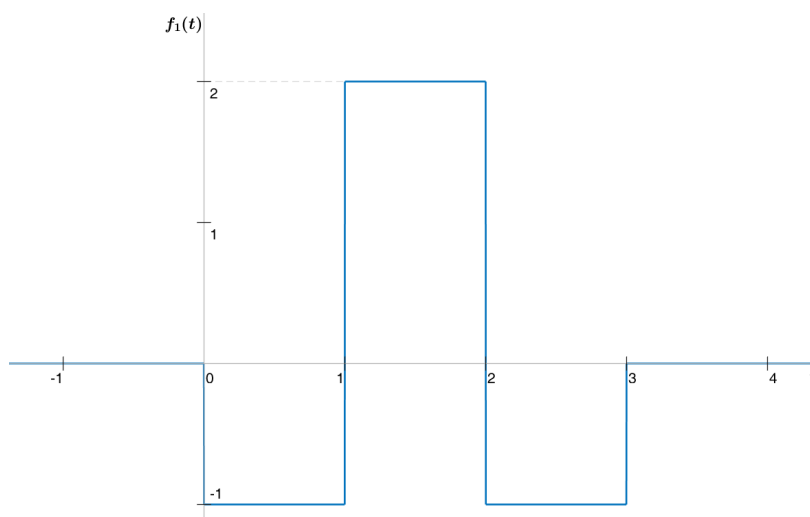


Slika 6.28: Grafični prikaz križne korelacije φ_{21} signalov $f_2(t)$ in $f_1(t + \tau)$.

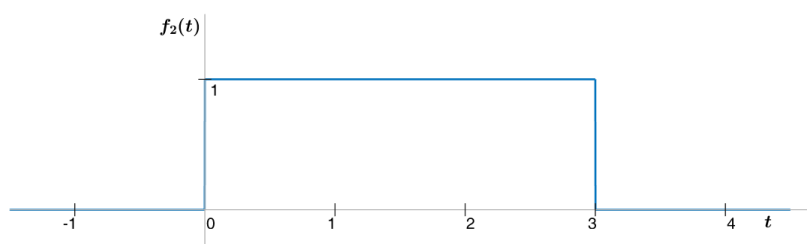
4. Določite konvolucijo $\rho_{12}(\tau)$ podanih neperiodičnih signalov

$$f_1(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ -1, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

ki sta prikazana na Slikah 6.29 in 6.30.



Slika 6.29: Grafični prikaz signala $f_1(t)$.

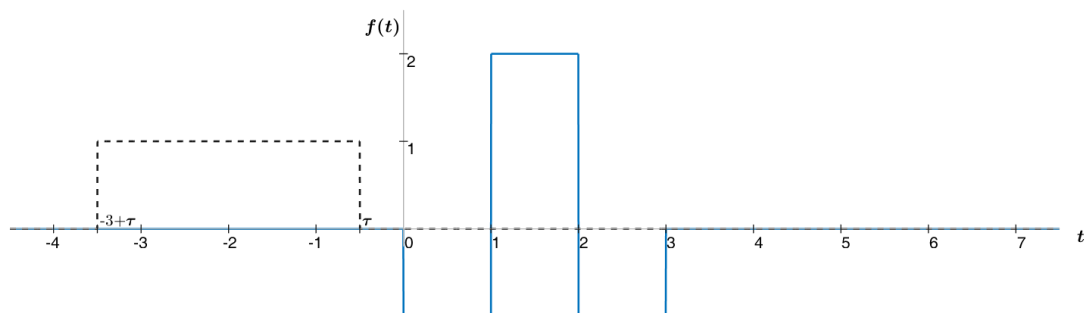


Slika 6.30: Grafični prikaz signala $f_2(t)$.

V skladu z enačbo (6.3) konvolucijo ρ_{12} izračumo tako, da najprej obrnemo signal $f_2(t)$ (ga prezrcalimo glede na y os), nato pa ga premikamo v levo za $\tau < 0$ in v desno, za $\tau > 0$:

$\tau < 0$ (Slika 6.31):

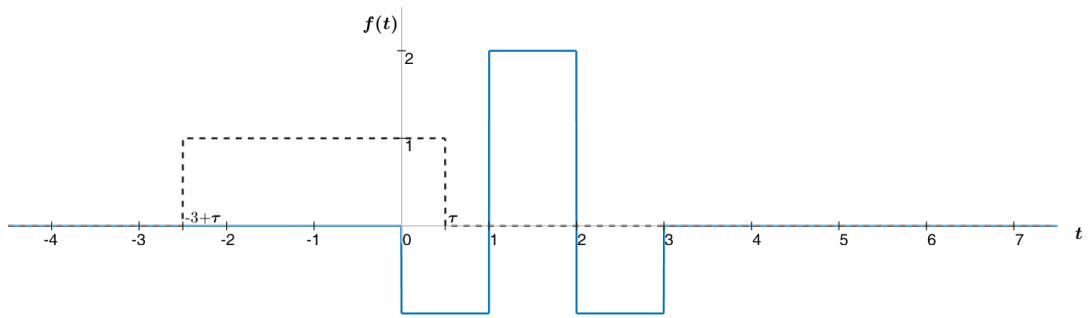
$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_j(\tau - t) dt = 0$$



Slika 6.31: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(-t + \tau)$ za $\tau < 0$.

$0 < \tau \leq 1$ (Slika 6.32):

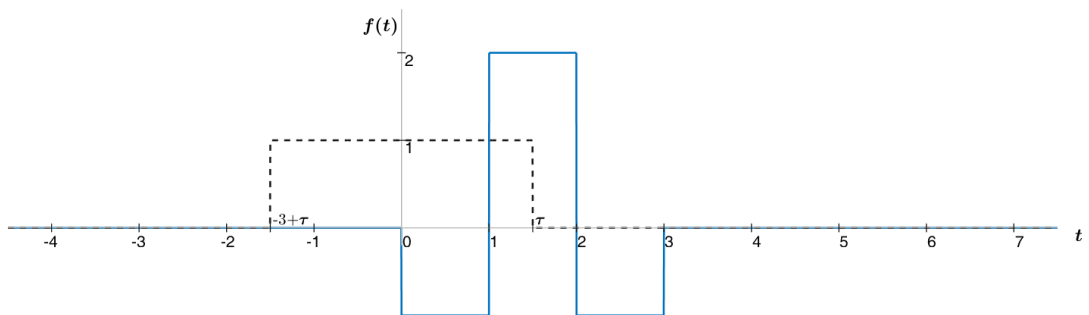
$$\rho_{12}(\tau) = \int_0^{\tau} (-1) \cdot 1 dt = -t \Big|_0^{\tau} = -\tau$$



Slika 6.32: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(-t + \tau)$ za $0 < \tau \leq 1$.

$1 < \tau \leq 2$ (Slika 6.33):

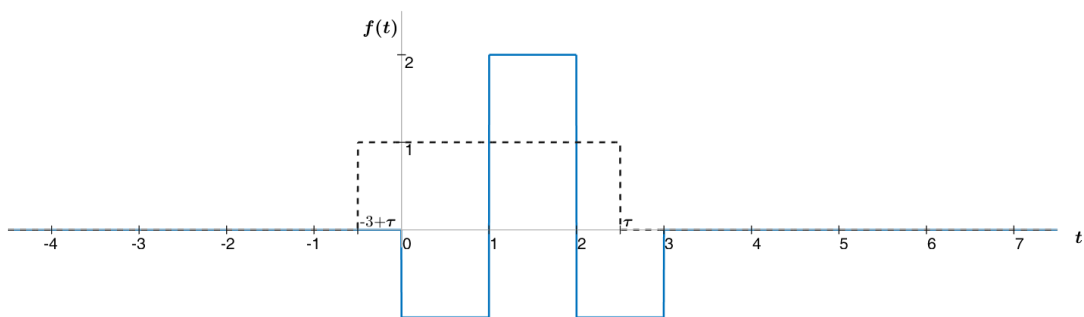
$$\rho_{12}(\tau) = \int_0^1 (-1) \cdot 1 \, dt + \int_1^\tau 2 \cdot 1 \, dt = -t \Big|_0^1 + 2t \Big|_1^\tau = -1 + 2\tau - 2 = 2\tau - 3$$



Slika 6.33: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(-t + \tau)$ za $1 < \tau \leq 2$.

$2 < \tau \leq 3$ (Slika 6.34):

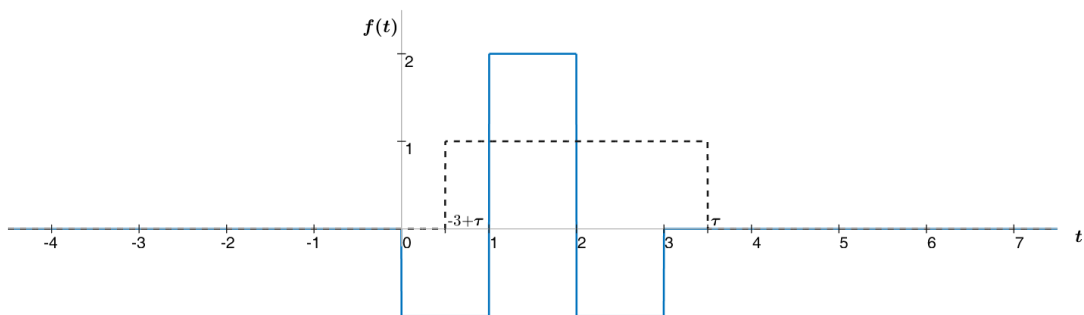
$$\begin{aligned} \rho_{12}(\tau) &= \int_0^1 (-1) \cdot 1 \, dt + \int_1^2 2 \cdot 1 \, dt + \int_2^\tau (-1) \cdot 1 \, dt = -t \Big|_0^1 + 2t \Big|_1^2 - t \Big|_2^\tau = \\ &= -1 + 4 - 2 - \tau + 2 = 3 - \tau \end{aligned}$$



Slika 6.34: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(-t + \tau)$ za $2 < \tau \leq 3$.

$3 < \tau \leq 4$ (Slika 6.35):

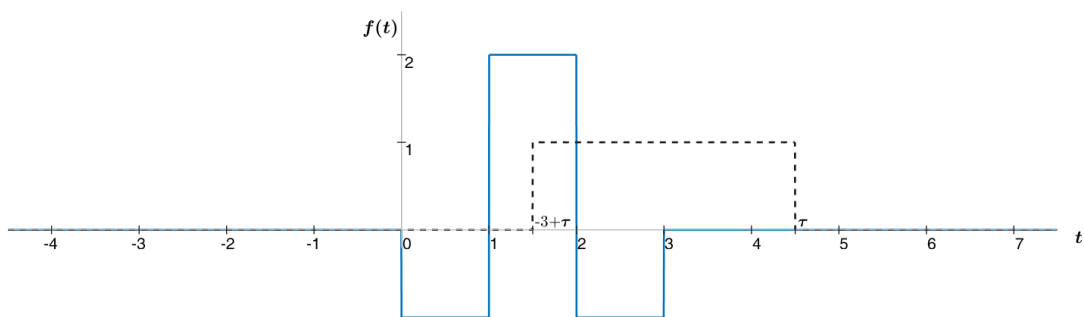
$$\begin{aligned} \rho_{12}(\tau) &= \int_{-3+\tau}^1 (-1) \cdot 1 \, dt + \int_1^2 2 \cdot 1 \, dt + \int_2^3 (-1) \cdot 1 \, dt = -t \Big|_{-3+\tau}^1 + 2t \Big|_1^2 - t \Big|_2^3 = \\ &= -1 - 3 + \tau + 4 - 2 - 3 + 2 = \tau - 3 \end{aligned}$$



Slika 6.35: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(-t + \tau)$ za $3 < \tau \leq 4$.

$4 < \tau \leq 5$ (Slika 6.36):

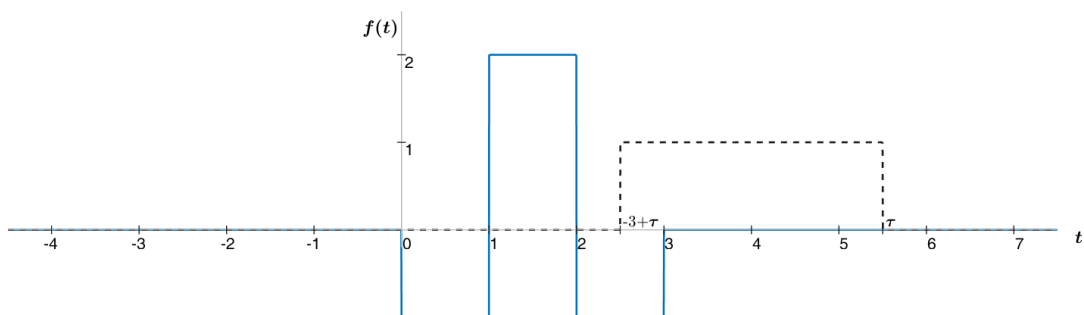
$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-3+\tau}^2 2 \cdot 1 \, dt + \int_2^3 (-1) \cdot 1 \, dt = 2t \Big|_{-3+\tau}^2 - t \Big|_2^3 = 4 + 6 - 2\tau - 3 + 2 = 9 - 2\tau$$



Slika 6.36: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(-t + \tau)$ za $4 < \tau \leq 5$.

$5 < \tau \leq 6$ (Slika 6.37):

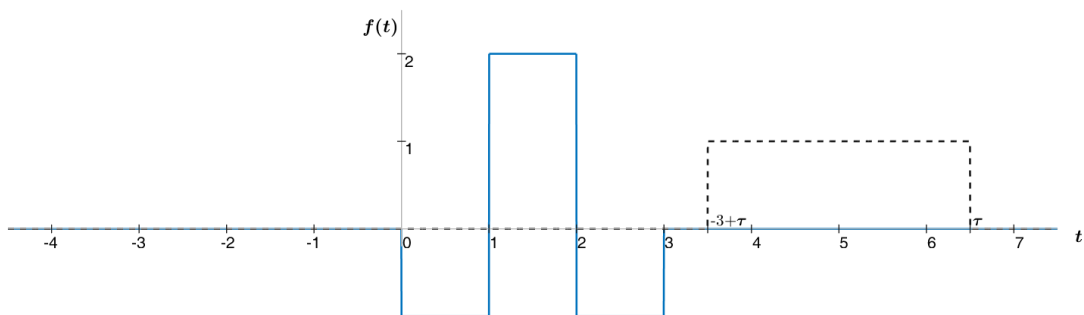
$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-3+\tau}^3 (-1) \cdot 1 dt = -t \Big|_{-3+\tau}^3 = -3 - (-3 + \tau) = \tau - 6$$



Slika 6.37: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(-t + \tau)$ za $5 < \tau \leq 6$.

$\tau > 6$ (Slika 6.38):

$$\rho_{12}(\tau) = 0$$

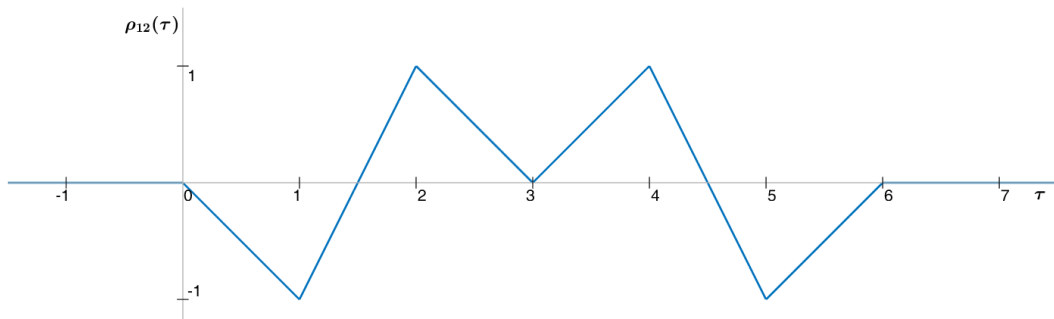


Slika 6.38: Prekrivanje signalov $f_1(t)$ in $f_2(-t + \tau)$ za $\tau > 6$.

Konvolucija ρ_{12} je torej

$$\rho_{12} = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ -\tau, & 0 < \tau \leq 1 \\ 2\tau - 3, & 1 < \tau \leq 2 \\ 3 - \tau, & 2 < \tau \leq 3 \\ \tau - 3, & 3 < \tau \leq 4 \\ 9 - 2\tau, & 4 < \tau \leq 5 \\ \tau - 6, & 5 < \tau \leq 6 \\ 0, & \tau > 6 \end{cases}$$

Grafični prikaz konvolucije ρ_{12} je podan na Sliki 6.39.



Slika 6.39: Grafični prikaz konvolucije ρ_{12} signalov $f_1(t)$ in $f_2(t)$.

Konvolucija je simetrična operacija in zato zanjo velja $\rho_{ij}(\tau) = \rho_{ji}(\tau)$. Konvolucija ρ_{21} je torej enaka konvoluciji ρ_{12} .

Poglavje 7

Prevajanje signalov skozi linearne stacionarne sisteme

7.1 Uvod

Sistemi so linearni, kadar za njih veljata lastnosti aditivnosti in proporcionalnosti. Ko linearni sistem vzbujamo z vsoto dveh signalov, je njegov odziv enak vsoti odzivov sistema na vsakega od teh dveh signalov posebej. Lastnost proporcionalnosti pa nam pove, da je odziv sistema na vhodni signal pomnožen z neko konstanto sorazmerno večji od odziva na nepomnožen vhodni signal. Poleg teh dveh lastnosti linearni stacionarni sistemi izpolnjujejo še lastnost stacionarnosti, ki pravi, da je odziv sistema na časovno premaknjeno vbujanje signal, ki je časovno premaknjen za enako časovno konstanto.

Odziv linearne stacionarne sistema na enotni impulz $h(t)$ je zelo pomemben signal, saj se z njegovo pomočjo lahko določi odziv sistema na katerikoli drug vhodni signal $u(t)$. Izhodni signal $y(t)$ v linearnem stacionarnem sistemu je namreč enak konvoluciji vhodnega signala $u(t)$ in odziva sistema na enotni impulz $h(t)$ (Slika 7.1):

$$y(t) = u(\tau) * h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (7.1)$$

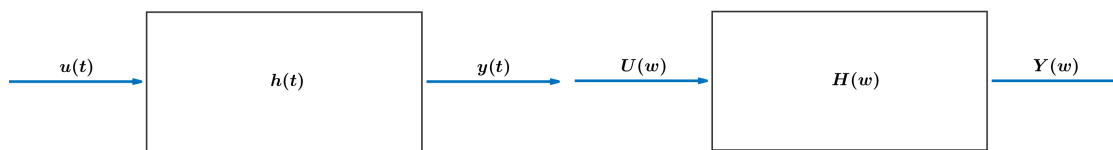
Konvolucija je simetrična in zato lahko zapišemo:

$$y(t) = u(\tau) * h(\tau) = h(\tau) * u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau \quad (7.2)$$

Z uporabo Fourierjeve transformacije lahko enačbo (7.1) pretvorimo v (Slika 7.1):

$$Y(w) = U(w) \cdot H(w)$$

Fourierjev transform $H(w)$ imenujemo prevajalna funkcija linearne stacionarne sistema.



Slika 7.1: Ponazoritev prevajanja signalov v časovnem (levo) in frekvenčnem prostoru (desno).

7.2 Naloge

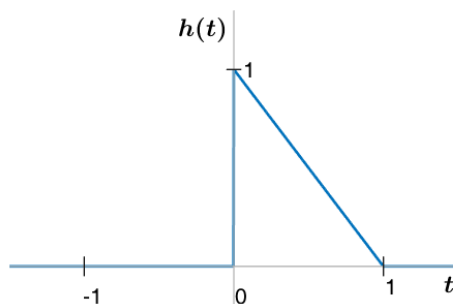
1. Podan je linearni stacionarni sistem z odzivom na enotin impulz

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

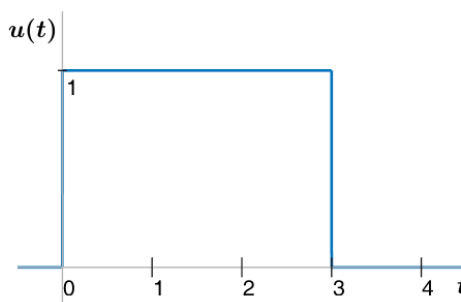
ki je prikazan na Sliki 7.2. Predpostavimo, da je na vhodu sistema vhodni signal

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

prikazan na sliki 7.3. Določite izhodni signal tega sistema.



Slika 7.2: Grafični prikaz odziva linearne stacionarne sistema na enotin impulz $h(t)$.



Slika 7.3: Grafični prikaz vhodnega signala $u(t)$.

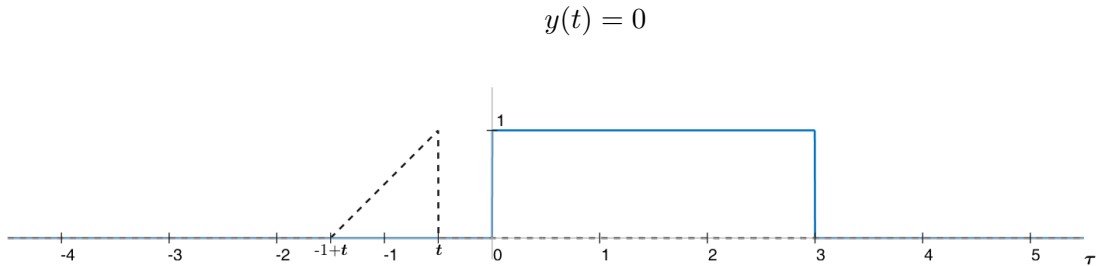
Izhodni signal linearne stacionarne sistema izračunamo s pomočjo konvolucije vhodnega signala $u(\tau)$ in njegovega odziva na enotin impulz $h(\tau)$. Skladno z enačbo (7.1) to pomeni, da se signal $h(\tau)$ najprej prezrcali preko y-osi, nato pa se premika v

desno za pozitivne vrednosti $t > 0$ in v levo za negativne vrednosti $t < 0$. Konvolucija je komutativna operacija in zato velja $u(\tau) * h(\tau) = h(\tau) * u(\tau)$. Posledično do enakega rezultata pridemo tudi, če se odločimo, da bomo z namenom izračuna konvolucije premikali signal $u(\tau)$. Slednje bomo pokazali z izračunom iskanega odziva danega linearne stacionarnega sistema na oba načina.

I.

$$y(t) = u(\tau) * h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

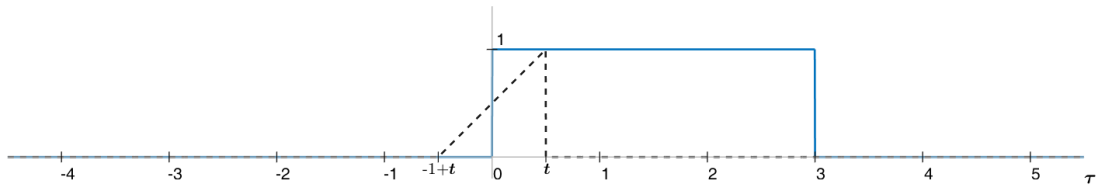
$t < 0$ (Slika 7.4):



Slika 7.4: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $t < 0$.

$0 < t \leq 1$ (Slika 7.5):

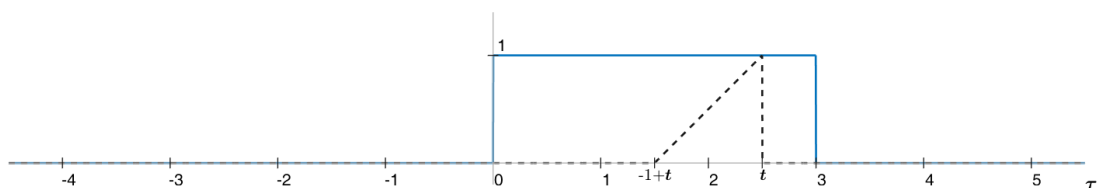
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t 1 \cdot (1 - t + \tau) d\tau = (1 - t) \int_0^t d\tau + \int_0^t \tau d\tau = (1 - t)\tau \Big|_0^t + \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^t = (1 - t) \cdot t + \frac{t^2}{2} = \\ &= t - t^2 + \frac{t^2}{2} = t - \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$



Slika 7.5: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $0 < t \leq 1$.

$1 < t \leq 3$ (Slika 7.6):

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-1+t}^t 1 \cdot (1 - t + \tau) d\tau = (1 - t) \int_{-1+t}^t d\tau + \int_{-1+t}^t \tau d\tau = (1 - t)\tau \Big|_{-1+t}^t + \frac{\tau^2}{2} \Big|_{-1+t}^t = \\ &= (1 - t) \cdot t - (1 - t)(-1 + t) + \frac{t^2}{2} - \frac{(-1 + t)^2}{2} = t - t^2 + 1 - 2t + t^2 + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + t - \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

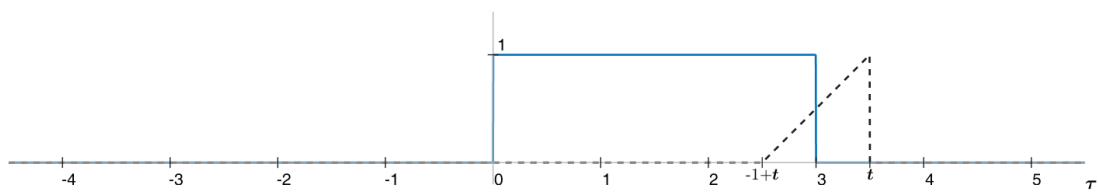


Slika 7.6: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $1 < t \leq 3$.

$3 < t \leq 4$ (Slika 7.7):

$$y(t) = \int_{-1+t}^3 1 \cdot (1-t+\tau) d\tau = (1-t) \int_{-1+t}^3 d\tau + \int_{-1+t}^3 \tau d\tau = (1-t)\tau \Big|_{-1+t}^3 + \frac{\tau^2}{2} \Big|_{-1+t}^3 =$$

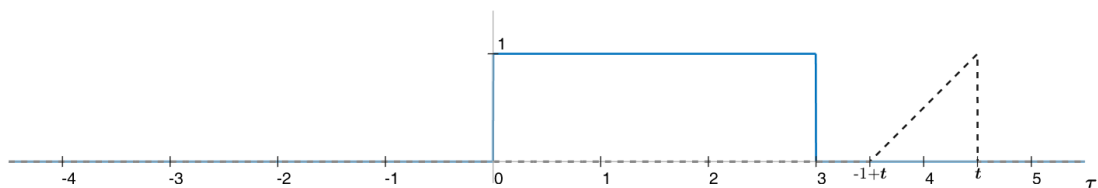
$$= (1-t) \cdot 3 - (1-t)(-1+t) + \frac{9}{2} - \frac{(-1+t)^2}{2} = 3 - 3t + 1 - 2t + t^2 + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + t - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2} - 4t + 8$$



Slika 7.7: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $3 < t \leq 4$.

$t > 4$ (Slika 7.8):

$$y(t) = 0$$



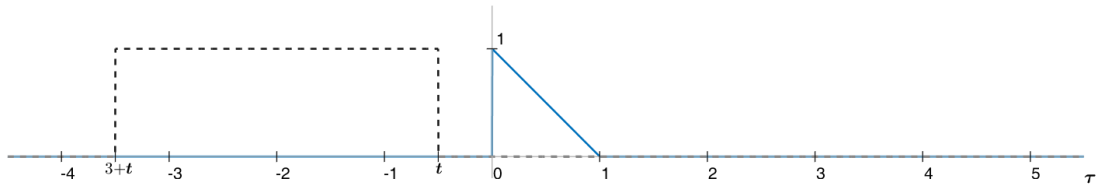
Slika 7.8: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $4 > t$.

II.

$$y(t) = u(\tau) * h(\tau) = h(\tau) * u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau$$

$t < 0$ (Slika 7.9):

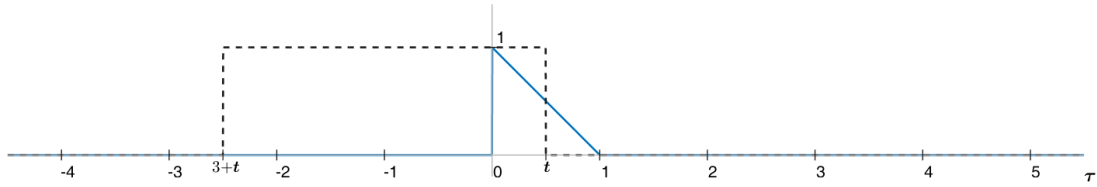
$$y(t) = 0$$



Slika 7.9: Prekrivanje signalov $h(\tau)$ in $u(t - \tau)$ za $t < 0$.

$0 < t \leq 1$ (Slika 7.10):

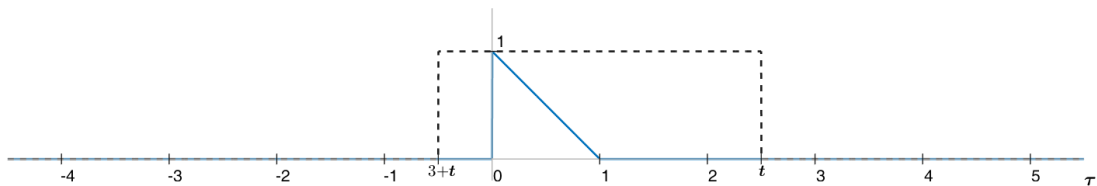
$$y(t) = \int_0^t (1 - \tau) \cdot 1 d\tau = \int_0^t d\tau - \int_0^t \tau d\tau = \tau \Big|_0^t + \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^t = t - \frac{t^2}{2}$$



Slika 7.10: Prekrivanje signalov $h(\tau)$ in $u(t - \tau)$ za $0 < t \leq 1$.

$1 < t \leq 3$ (Slika 7.11):

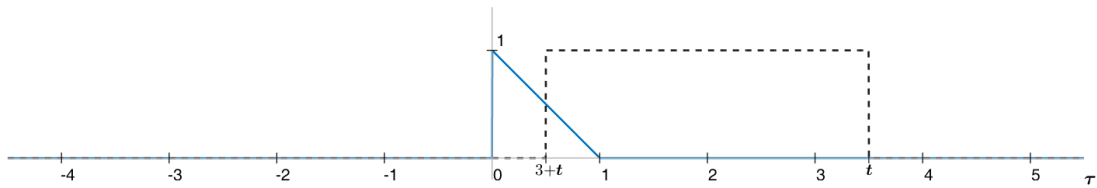
$$y(t) = \int_0^1 (1 - \tau) \cdot 1 d\tau = \int_0^1 d\tau - \int_0^1 \tau d\tau = \tau \Big|_0^1 - \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



Slika 7.11: Prekrivanje signalov $h(\tau)$ in $u(t - \tau)$ za $1 < t \leq 3$.

$3 < t \leq 4$ (Slika 7.12):

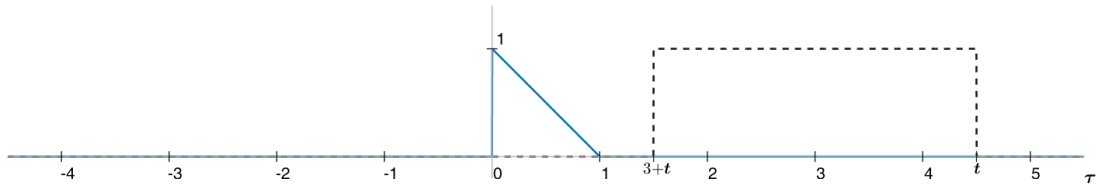
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-3+t}^1 (1-\tau) \cdot 1 \, d\tau = \int_{-3+t}^1 d\tau - \int_{-3+t}^1 \tau \, d\tau = \tau \Big|_{-3+t}^1 - \frac{\tau^2}{2} \Big|_{-3+t}^1 = \\
 &= 1 + 3 - t - \frac{1}{2} + \frac{(-3+t)^2}{2} = 1 + 3 - t - \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{6t}{2} + \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2} - 4t + 8
 \end{aligned}$$



Slika 7.12: Prekrivanje signalov $h(\tau)$ in $u(t-\tau)$ za $3 < t \leq 4$.

$t > 4$ (Slika 7.13):

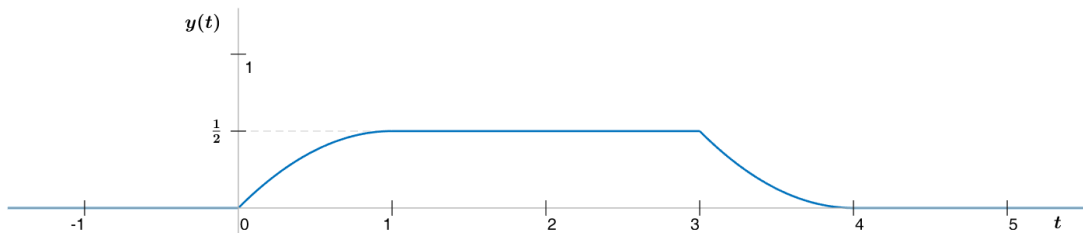
$$y(t) = 0$$



Slika 7.13: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t-\tau)$ za $4 > t$.

V obeh primerih je odziv $y(t)$ (Slika 7.14) danega linearnega stacionarnega sistema na vhodni signal $u(t)$:

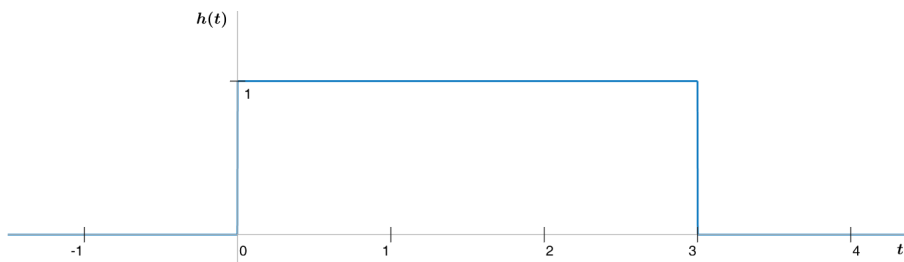
$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t - \frac{t^2}{2}, & 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < t \leq 3 \\ \frac{t^2}{2} - 4t + 8, & 3 < t \leq 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$$



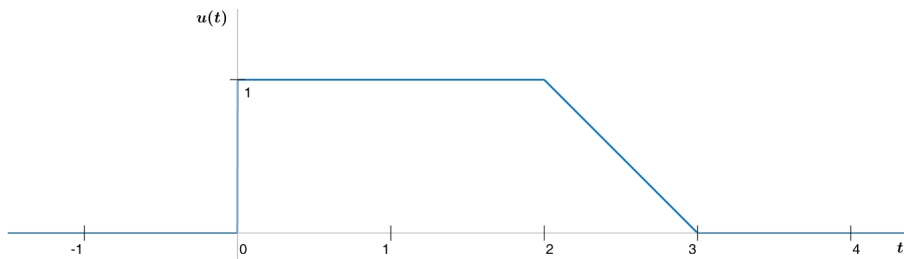
Slika 7.14: Odziv $y(t)$ linearnega stacionarnega sistema na vhodni signal $u(t)$.

2. Linearni stacionarni sistem ima odziv na enotin impulz enak signalu $h(t)$, podan na Sliki 7.15. Določi odziv tega sistema na vhodni signal $u(t)$, podan na Sliki 7.16.

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ -t + 3, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$



Slika 7.15: Grafični prikaz odziva linearnega stacionarnega sistema na enotin impulz $h(t)$.

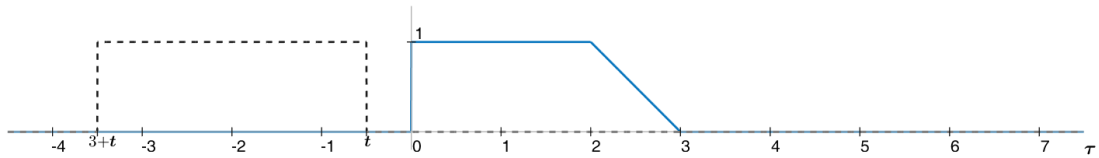


Slika 7.16: Grafični prikaz vhodnega signala $u(t)$.

Odziv $y(t)$ bomo izračunali po enačbi (7.1):

$t < 0$ (Slika 7.17):

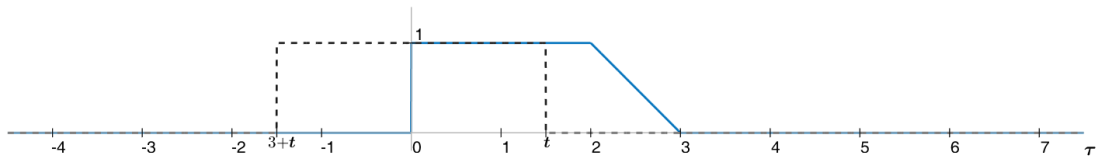
$$y(t) = 0$$



Slika 7.17: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $t < 0$.

$0 < t \leq 2$ (Slika 7.18):

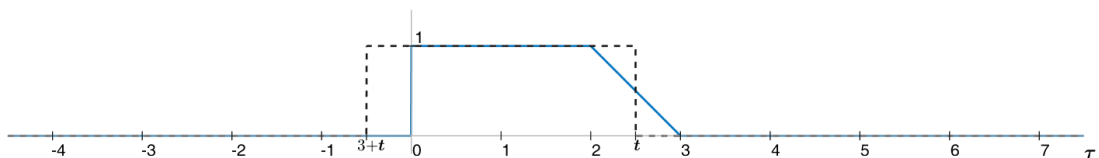
$$y(t) = \int_0^t 1 \cdot 1 d\tau = \tau \Big|_0^t = t$$



Slika 7.18: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $0 < t \leq 2$.

$2 < t \leq 3$ (Slika 7.19):

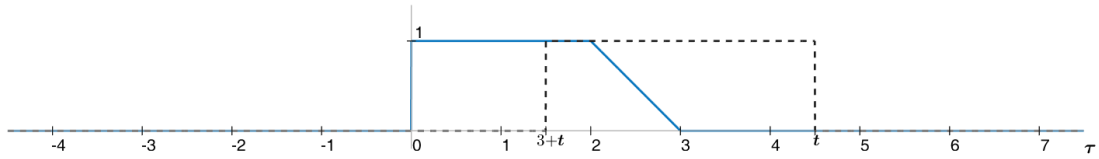
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^2 1 \cdot 1 d\tau + \int_2^t (-\tau + 3) \cdot 1 d\tau = \int_0^2 d\tau - \int_2^t \tau d\tau + 3 \int_2^t d\tau = \tau \Big|_0^2 - \frac{\tau^2}{2} \Big|_2^t + 3\tau \Big|_2^t = \\ &= 2 - \frac{t^2}{2} + \frac{4}{2} + 3t - 6 = -\frac{t^2}{2} + 3t - 2 \end{aligned}$$



Slika 7.19: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $2 < t \leq 3$.

$3 < t \leq 5$ (Slika 7.20):

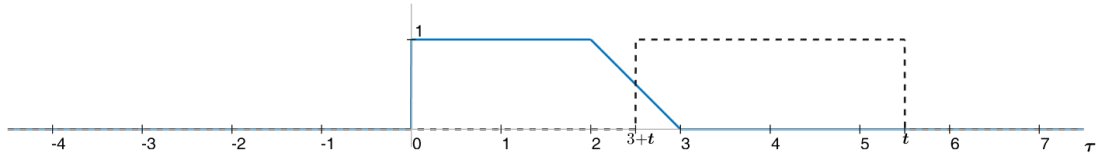
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-3+t}^2 1 \cdot 1 \, d\tau + \int_2^3 (-\tau+3) \cdot 1 \, d\tau = \int_{-3+t}^2 d\tau - \int_2^3 \tau \, d\tau + 3 \int_2^3 d\tau = \tau \Big|_{-3+t}^2 - \frac{\tau^2}{2} \Big|_2^3 + 3\tau \Big|_2^3 = \\
 &= 2 + 3 - t - \frac{9}{2} + \frac{4}{2} + 9 - 6 = -t + \frac{11}{2}
 \end{aligned}$$



Slika 7.20: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $3 < t \leq 5$.

$5 < t \leq 6$ (Slika 7.21):

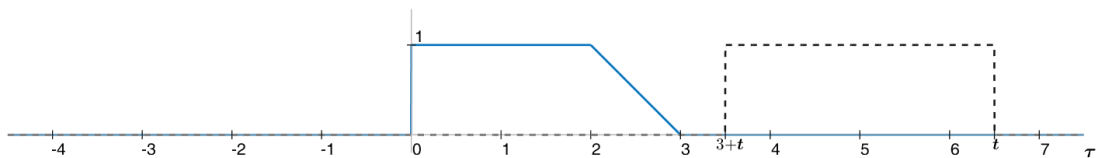
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-3+t}^3 (-\tau + 3) \cdot 1 \, d\tau = - \int_{-3+t}^3 \tau \, d\tau + 3 \int_{-3+t}^3 d\tau = -\frac{\tau^2}{2} \Big|_{-3+t}^3 + 3\tau \Big|_{-3+t}^3 = \\
 &= -\frac{9}{2} + \frac{(-3+t)^2}{2} + 9 + 9 - 3t = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{6t}{2} + \frac{t^2}{2} + 18 - 3t = \frac{t^2}{2} - 6t + 18
 \end{aligned}$$



Slika 7.21: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $5 < t \leq 6$.

$t > 6$ (Slika 7.22):

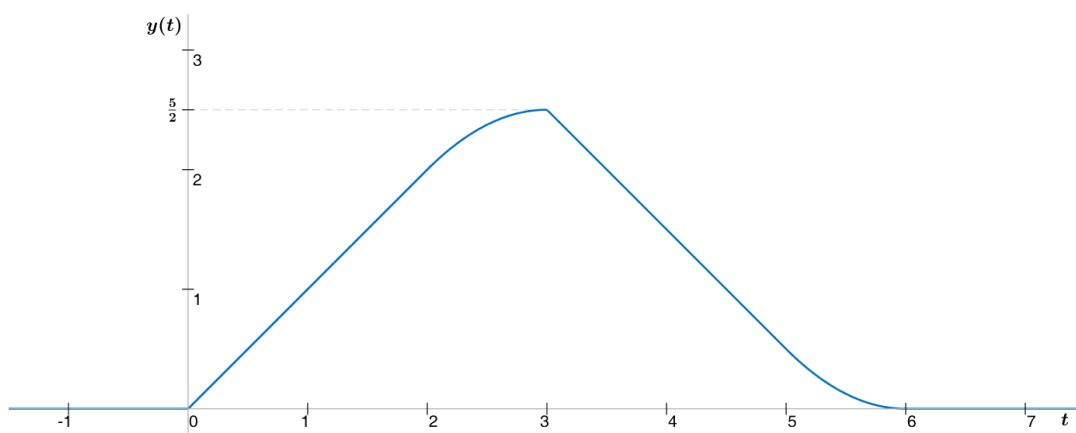
$$y(t) = 0$$



Slika 7.22: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $6 > t$.

Odziv $y(t)$ (Slika 7.23) danega linearnega stacionarnega sistema na vhodni signal $u(t)$ je torej:

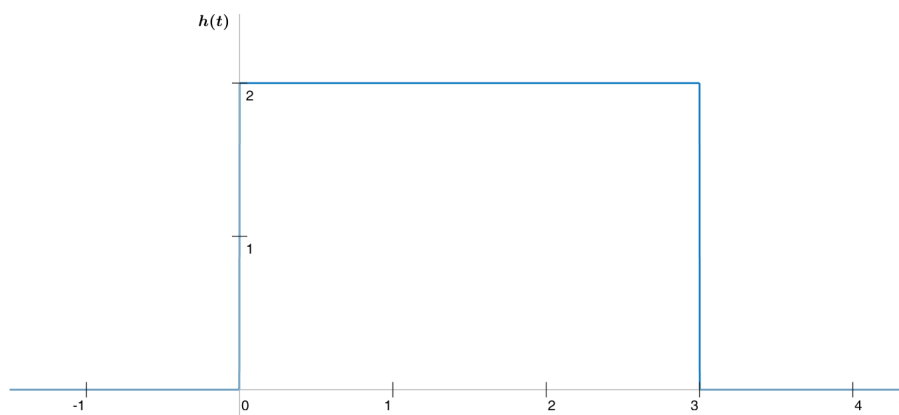
$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 < t \leq 2 \\ -\frac{t^2}{2} + 3t - 2, & 2 < t \leq 3 \\ -t + \frac{11}{2}, & 3 < t \leq 5 \\ \frac{t^2}{2} - 6t + 18, & 5 < t \leq 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases}$$



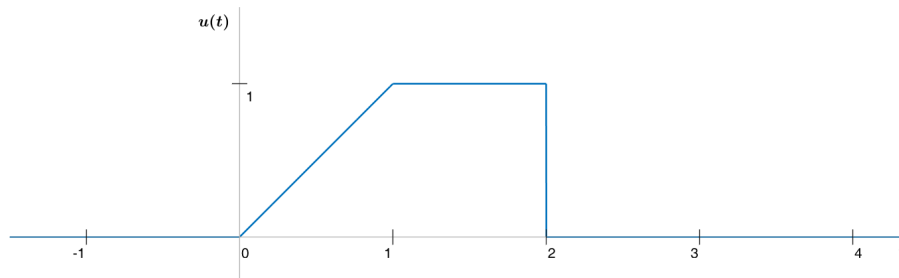
Slika 7.23: Odziv $y(t)$ linearnega stacionarnega sistema na vhodni signal $u(t)$.

3. Linearni stacionarni sistem ima odziv na enotin impulz enak signalu $h(t)$, ki je podan na Sliki 7.24. Določi odziv tega sistema na vhodni signal $u(t)$, podan na Sliki 7.25.

$$h(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$



Slika 7.24: Grafični prikaz odziva linearne stacionarne sistema na enotin impulz $h(t)$.

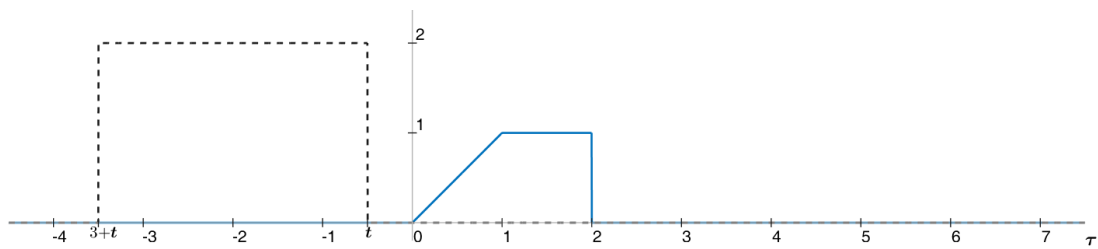


Slika 7.25: Grafični prikaz vhodnega signala $u(t)$.

Odziv $y(t)$ izračunamo za vse $t \in (-\infty, \infty)$:

$t < 0$ (Slika 7.26):

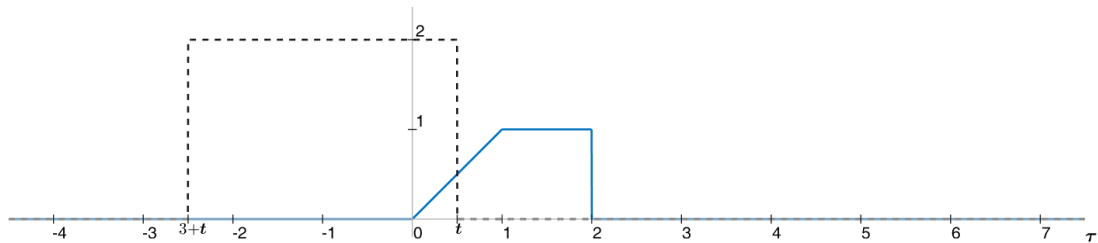
$$y(t) = 0$$



Slika 7.26: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $t < 0$.

$0 < t \leq 1$ (Slika 7.27):

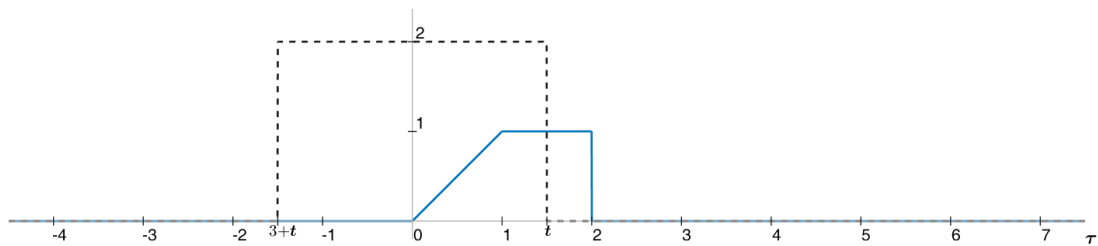
$$y(t) = \int_0^t \tau \cdot 2 \, d\tau = 2 \int_0^t \tau \, d\tau = 2 \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^t = t^2$$



Slika 7.27: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $0 < t \leq 1$.

$1 < t \leq 2$ (Slika 7.28):

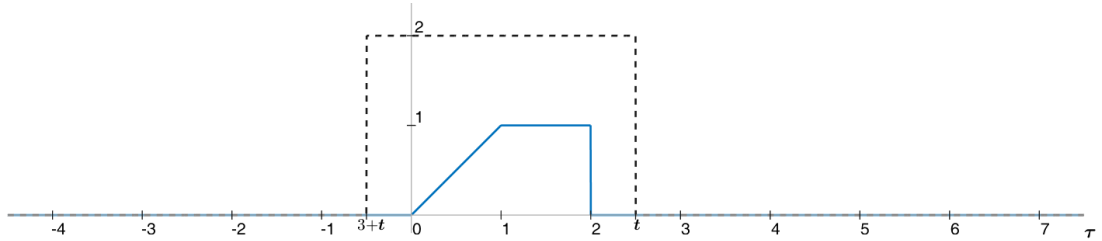
$$y(t) = \int_0^1 \tau \cdot 2 \, d\tau + \int_1^t 1 \cdot 2 \, d\tau = 2 \int_0^1 \tau \, d\tau + 2 \int_1^t d\tau = 2 \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^1 + 2\tau \Big|_1^t = 1 + 2t - 2 = 2t - 1$$



Slika 7.28: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $1 < t \leq 2$.

$2 < t \leq 3$ (Slika 7.29):

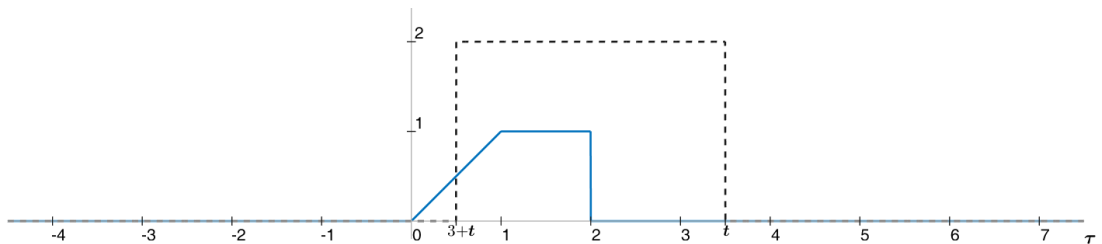
$$y(t) = \int_0^1 \tau \cdot 2 d\tau + \int_1^2 1 \cdot 2 d\tau = 2 \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^1 + 2\tau \Big|_1^2 = 1 + 4 - 2 = 3$$



Slika 7.29: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $2 < t \leq 3$.

$3 < t \leq 4$ (Slika 7.30):

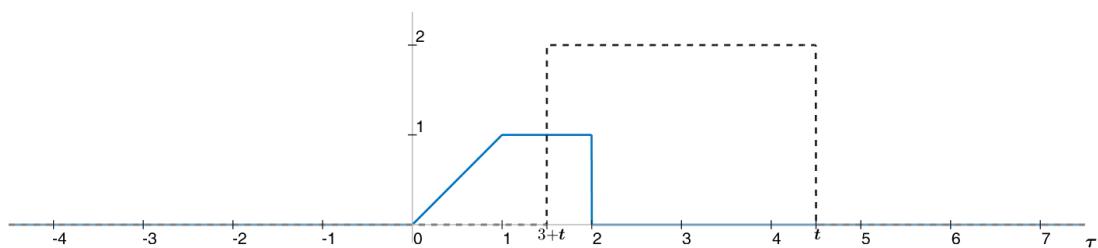
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-3+t}^1 \tau \cdot 2 d\tau + \int_1^2 1 \cdot 2 d\tau = 2 \frac{\tau^2}{2} \Big|_{-3+t}^1 + 2\tau \Big|_1^2 = \\ &= 1 - (-3+t)^2 + 4 - 2 = 1 - 9 + 6t - t^2 + 4 - 2 = -t^2 + 6t - 6 \end{aligned}$$



Slika 7.30: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $3 < t \leq 4$.

$4 < t \leq 5$ (Slika 7.31):

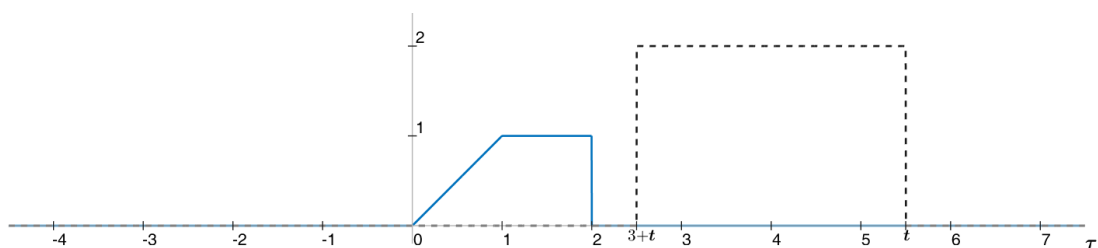
$$y(t) = \int_{-3+t}^2 1 \cdot 2 d\tau = 2\tau \Big|_{-3+t}^2 = 4 + 6 - 2t = 10 - 2t$$



Slika 7.31: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $4 < t \leq 5$.

$t > 5$ (Slika 7.32):

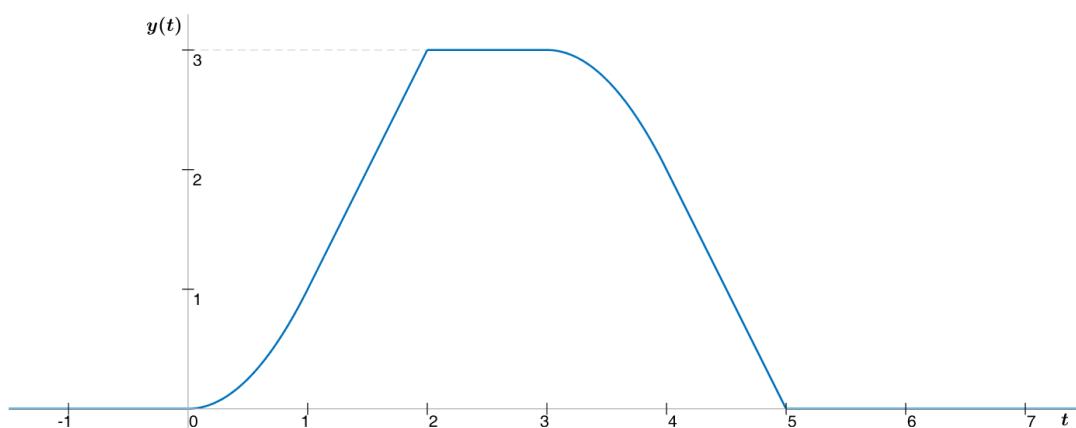
$$y(t) = 0$$



Slika 7.32: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $5 > t$.

Odziv $y(t)$ (Slika 7.33) danega linearnege stacionarnega sistema na vhodni signal $u(t)$ je torej:

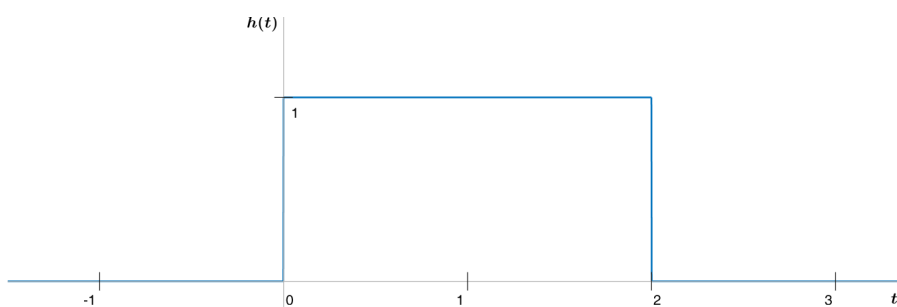
$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2, & 0 < t \leq 1 \\ 2t - 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3, & 2 < t \leq 3 \\ -t^2 + 6t - 6, & 3 < t \leq 4 \\ 10 - 2t, & 4 < t \leq 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$



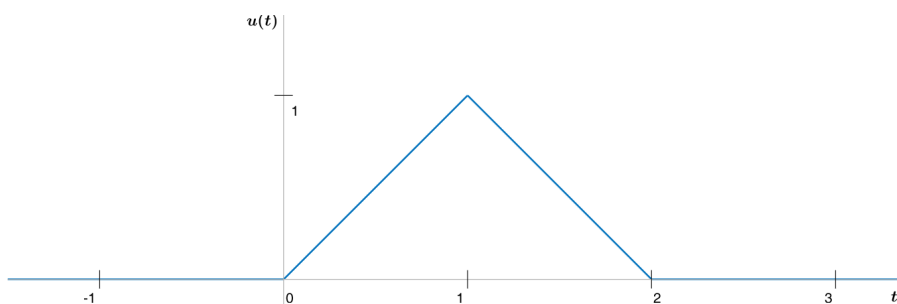
Slika 7.33: Odziv $y(t)$ linearnega stacionarnega sistema na vhodni signal $u(t)$.

4. Linearni stacionarni sistem ima odziv na enotin impulz enak signalu $h(t)$, ki je podan na Sliki 7.34. Določi odziv tega sistema na vhodni signal $u(t)$, podan na Sliki 7.35.

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -t + 2, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$



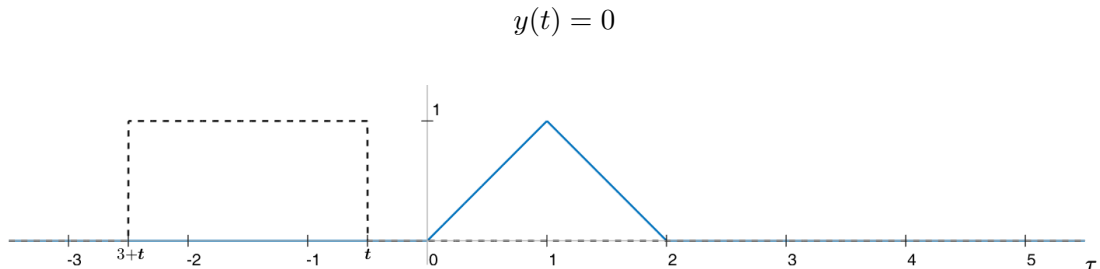
Slika 7.34: Grafični prikaz odziva linearnega stacionarnega sistema na enotin impulz $h(t)$.



Slika 7.35: Grafični prikaz vhodnega signala $u(t)$.

V skladu z enačbo (7.1):

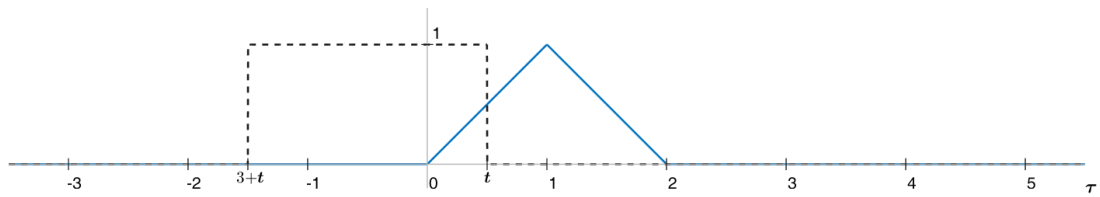
$t < 0$ (Slika 7.36):



Slika 7.36: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $t < 0$.

$0 < t \leq 1$ (Slika 7.37):

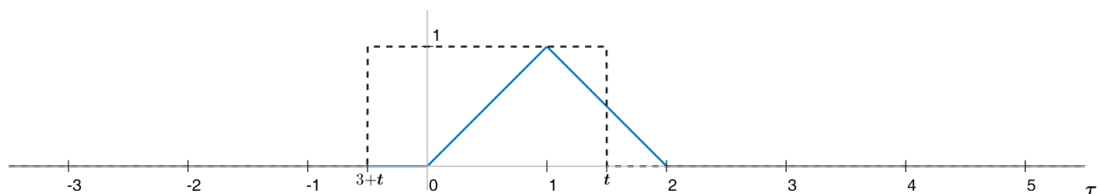
$$y(t) = \int_0^t \tau \cdot 1 \, d\tau = \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^t = \frac{t^2}{2}$$



Slika 7.37: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $0 < t \leq 1$.

$1 < t \leq 2$ (Slika 7.38):

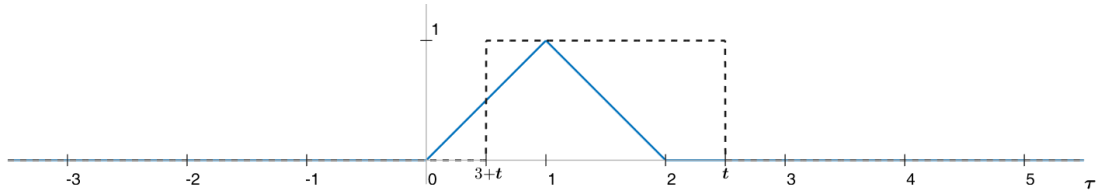
$$y(t) = \int_0^1 \tau \cdot 1 \, d\tau + \int_1^t (-\tau + 2) \cdot 1 \, d\tau = \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{\tau^2}{2} \Big|_1^t + 2\tau \Big|_1^t = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} + 2t - 2 = -\frac{t^2}{2} + 2t - 1$$



Slika 7.38: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $1 < t \leq 2$.

$2 < t \leq 3$ (Slika 7.39):

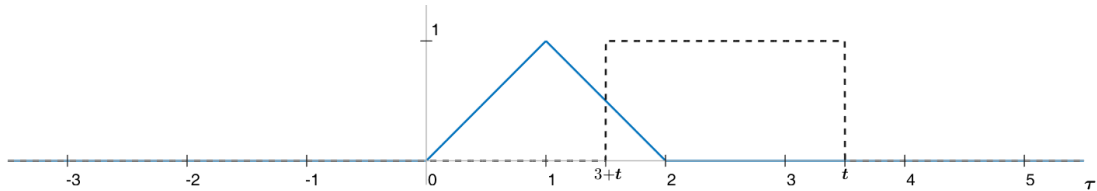
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-2+t}^1 \tau \cdot 1 d\tau + \int_1^2 (-\tau + 2) \cdot 1 d\tau = \frac{\tau^2}{2} \Big|_{-2+t}^1 - \frac{\tau^2}{2} \Big|_1^2 + 2\tau \Big|_1^2 = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{(-2+t)^2}{2} - \frac{4}{2} + \frac{1}{2} + 4 - 2 = \frac{1}{2} - 2 + 2t - \frac{t^2}{2} - \frac{4}{2} + \frac{1}{2} + 4 - 2 = -\frac{t^2}{2} + 2t - 1
 \end{aligned}$$



Slika 7.39: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $2 < t \leq 3$.

$3 < t \leq 4$ (Slika 7.40):

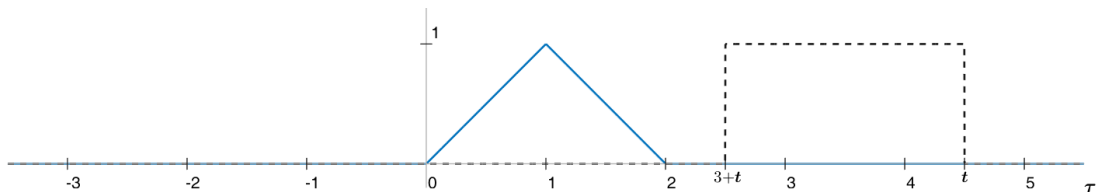
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-2+t}^2 (-\tau + 2) \cdot 1 d\tau = -\frac{\tau^2}{2} \Big|_{-2+t}^2 + 2\tau \Big|_{-2+t}^2 = -\frac{4}{2} + \frac{(-2+t)^2}{2} + 4 + 4 - 2t = \\
 &= -\frac{4}{2} + \frac{4}{2} - \frac{4t}{2} + \frac{t^2}{2} + 4 + 4 - 2t = \frac{t^2}{2} - 4t + 8
 \end{aligned}$$



Slika 7.40: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $3 < t \leq 4$.

$t > 4$ (Slika 7.41):

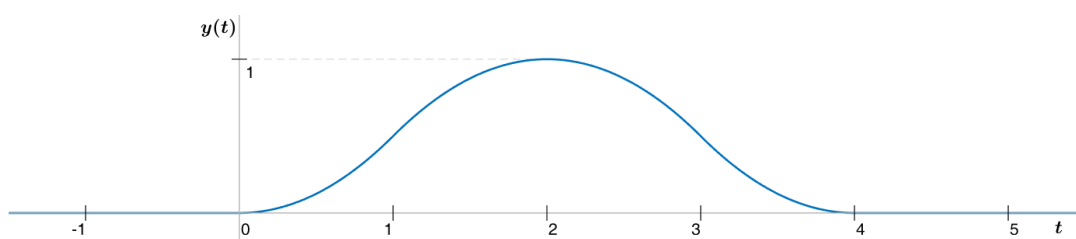
$$y(t) = 0$$



Slika 7.41: Prekrivanje signalov $u(\tau)$ in $h(t - \tau)$ za $t > 4$.

Odziv $y(t)$ (Slika 7.42) danega linearnega stacionarnega sistema na vhodni signal $u(t)$ je torej:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2}, & 0 < t \leq 1 \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 1, & 1 < t \leq 2 \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 1, & 2 < t \leq 3 \\ \frac{t^2}{2} - 4t + 8, & 3 < t \leq 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$$



Slika 7.42: Odziv $y(t)$ linearnega stacionarnega sistema na vhodni signal $u(t)$.

Poglavje 8

Diskretni signali

8.1 Uvod

Pri računalniški obdelavi smo fizično omejeni z maksimalno količino podatkov, ki jo lahko procesiramo ali shranimo, zato moramo ob zajemu signalov te ustrezno vzorčiti in kvantizirati. Postopek kvantizacije predstavlja diskretizacijo signalov po amplitudi, pri čemer je zapis amplitud digitalnih signalov možen le z omejeno natančnostjo. Vzorčenje predstavlja postopek diskretizacije po času, pri čemer se običajno izbere nek ustrezen in konstanten korak vzorčenja t_0 . Digitalne signale zapišemo v obliki:

$$f(nt_0) = \{..., f(-2t_0), f(-t_0), f(0), f(t_0), f(2t_0)...\}, n \in \mathbb{Z}$$

Digitalnemu signalu ne moremo določiti zvezne Fourierjeve transformacije, zato se pri frekvenčni analizi digitalnih signalov poslužimo *diskretne Fourierjeve transformacije*. Pri njenem izračunu obravnavamo le časovno omejene signale $f(t)$. Spekter diskretnega signala numerično ocenimo za končno število različnih frekvenc, zato je smiselno na frekvenčni osi w izbrati frekvenčni razmak w_0 in za končno število mnogokratnikov kw_0 določiti diskretno Fourierjevo transformacijo s pomočje naslednje vsote:

$$F_D(kw_0) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jkw_0t_0n} \quad (8.1)$$

kjer je t_0 interval vzorčenja signala $f(t)$, N pa število vzorcev. Ožji interval t_0 vzorčenja signala nam omogoča bolj natančno oceno njegovega spektra $F(w)$:

$$F(w)|_{w=kw_0} \approx t_0 \cdot F_D(kw_0) \quad (8.2)$$

Inverzno diskretno Fourierjevo transformacijo določimo z naslednjo enačbo:

$$f(nt_0) = \mathcal{F}_D^{-1}\{F_D(kw_0)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_D(kw_0) \cdot e^{jnw_0kt_0} \quad (8.3)$$

Konvolucijo dveh *periodičnih signalov* $f_1(nt_0)$ in $f_2(nt_0)$ s periodo Nt_0 definiramo z vsoto:

$$\begin{aligned} f(nt_0) &= \sum_{i=0}^{N-1} f_1(it_0) f_2([n-i]t_0) = \sum_{i=0}^{N-1} f_1([n-i]t_0) f_2(it_0) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_{D1}(kw_0) F_{D2}(kw_0) e^{jnw_0 t_0 k} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Konvolucijo dveh *neperiodičnih signalov* $f_1(nt_0)$ in $f_2(nt_0)$ izračunamo z vsoto:

$$f(nt_0) = t_0 \cdot \sum_{i=0}^n f_1(it_0) f_2([n-i]t_0) \quad (8.5)$$

8.2 Naloge

1. Podana sta odziv na enotni impulz $h(t)$ in vhodni signal $u(t)$. Vzorčena sta s časovnim razmakom $T = 0.5$.

$$h(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0.5, & n = 1 \\ 0, & n = 2 \\ -0.5, & n = 3 \\ -1, & n = 4 \end{cases} \quad u(nT) = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ -1, & n = 1 \\ 0, & n = 2 \\ 1, & n = 3 \\ -2, & n = 4 \end{cases}$$

Določite približno vrednost amplitudnega spektra $Y(w)$ odziva tega sistema pri frekvenci $w = \frac{3\pi}{2}$.

Najprej s pomočjo aperiodične konvolucije diskretnih signalov (enačba (8.5)) določimo odziv sistema $y(nT)$ na vhodni signal $u(nT)$:

$n < 0$:

$$y(nT) = 0$$

$n = 0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0.5 \cdot (u(0) \cdot h(0) + u(T) \cdot \underbrace{h(-T)}_{=0} + u(2T) \cdot \underbrace{h(-2T)}_{=0} + u(3T) \cdot \underbrace{h(-3T)}_{=0} + u(4T) \cdot \underbrace{h(-4T)}_{=0}) = \\ &= 0.5 \cdot (2 \cdot 1) = 1 \end{aligned}$$

$n = 1$:

$$\begin{aligned} y(T) &= 0.5 \cdot (u(0) \cdot h(T) + u(T) \cdot h(0) + u(2T) \cdot \underbrace{h(-T)}_{=0} + u(3T) \cdot \underbrace{h(-2T)}_{=0} + u(4T) \cdot \underbrace{h(-3T)}_{=0}) = \\ &= 0.5 \cdot (2 \cdot 0.5 + (-1) \cdot 1) = 0 \end{aligned}$$

$n = 2$:

$$\begin{aligned} y(2T) &= 0.5 \cdot (u(0) \cdot h(2T) + u(T) \cdot h(T) + u(2T) \cdot h(0) + u(3T) \cdot \underbrace{h(-T)}_{=0} + u(4T) \cdot \underbrace{h(-2T)}_{=0}) = \\ &= 0.5 \cdot (2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0.5 + 0 \cdot 1) = -0.25 \end{aligned}$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} y(3T) &= 0.5 \cdot (u(0) \cdot h(3T) + u(T) \cdot h(2T) + u(2T) \cdot h(T) + u(3T) \cdot h(0) + u(4T) \cdot \underbrace{h(-T)}_{=0}) = \\ &= 0.5 \cdot (2 \cdot (-0.5) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 1) = 0 \end{aligned}$$

$n = 4$:

$$\begin{aligned} y(4T) &= 0.5 \cdot (u(0) \cdot h(4T) + u(T) \cdot h(3T) + u(2T) \cdot h(2T) + u(3T) \cdot h(T) + u(4T) \cdot h(0)) = \\ &= 0.5 \cdot (2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-0.5) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0.5 + (-2) \cdot 1) = -1.5 \end{aligned}$$

$n = 5$:

$$\begin{aligned} y(5T) &= 0.5 \cdot (u(0) \cdot \underbrace{h(5T)}_{=0} + u(T) \cdot h(4T) + u(2T) \cdot h(3T) + u(3T) \cdot h(2T) + u(4T) \cdot h(T)) = \\ &= 0.5 \cdot ((-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-0.5) + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0.5) = 0 \end{aligned}$$

$n = 6$:

$$\begin{aligned} y(6T) &= 0.5 \cdot (u(0) \cdot \underbrace{h(6T)}_{=0} + u(T) \cdot \underbrace{h(5T)}_{=0} + u(2T) \cdot h(4T) + u(3T) \cdot h(3T) + u(4T) \cdot h(2T)) = \\ &= 0.5 \cdot (0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-0.5) + (-2) \cdot 0) = -0.25 \end{aligned}$$

$n = 7$:

$$\begin{aligned} y(7T) &= 0.5 \cdot (u(0) \cdot \underbrace{h(7T)}_{=0} + u(T) \cdot \underbrace{h(6T)}_{=0} + u(2T) \cdot \underbrace{h(5T)}_{=0} + u(3T) \cdot h(4T) + u(4T) \cdot h(3T)) = \\ &= 0.5 \cdot (1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-0.5)) = 0 \end{aligned}$$

$n = 8$:

$$\begin{aligned} y(8T) &= 0.5 \cdot (u(0) \cdot \underbrace{h(8T)}_{=0} + u(T) \cdot \underbrace{h(7T)}_{=0} + u(2T) \cdot \underbrace{h(6T)}_{=0} + u(3T) \cdot \underbrace{h(5T)}_{=0} + u(4T) \cdot h(4T)) = \\ &= 0.5 \cdot ((-2) \cdot (-1)) = 1 \end{aligned}$$

$n > 8$:

$$y(nT) = 0$$

Odziv na vhodni signal $u(nT)$ je torej:

$$y(nT) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 0, & n = 1 \\ -0.25, & n = 2 \\ 0, & n = 3 \\ -1.5, & n = 4 \\ 0, & n = 5 \\ -0.25, & n = 6 \\ 0, & n = 7 \\ 1, & n = 8 \\ 0, & n > 8 \end{cases}$$

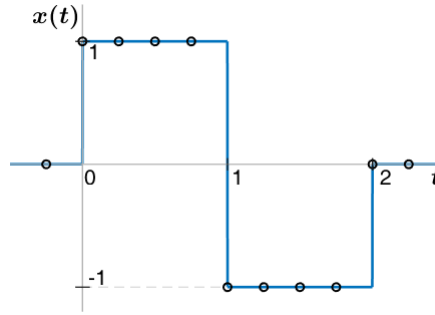
Zanima nas približna vrednost amplitudnega spektra $Y(w)$. V ta namen bomo najprej določili vrednost diskretnega spektra $F_D(kw_0)$, nato pa po enačbi (8.2) izračunali še iskan približek.

$$\begin{aligned} N = 8, w_0 = \frac{2\pi}{N \cdot T} &\Rightarrow \mathbf{w}_0 = \frac{2\pi}{8 \cdot 0.5} = \frac{\pi}{2}, w = \frac{3\pi}{2} = k \cdot w_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{k} = 3, \mathbf{w}_0 \mathbf{T} \mathbf{k} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

$$Y(w)|_{w=\frac{3\pi}{2}} \doteq T \cdot Y_D(kw_0)|_{k=3}$$

$$\begin{aligned} Y_D(3w_0) &= \sum_{n=0}^7 y(nT) \cdot e^{-jn w_0 T k} = y(0) \cdot e^0 + \underbrace{y(T)}_{=0} \cdot e^{-j \frac{3\pi}{4}} + y(2T) \cdot e^{-j \frac{3\pi}{2}} + \underbrace{y(3T)}_{=0} \cdot e^{-j \frac{9\pi}{4}} + \\ &+ y(4T) \cdot e^{-j 3\pi} + \underbrace{y(5T)}_{=0} \cdot e^{-j \frac{15\pi}{4}} + y(6T) \cdot e^{-j \frac{9\pi}{2}} + \underbrace{y(7T)}_{=0} \cdot e^{-j \frac{21\pi}{4}} + y(8T) \cdot e^{-j 6\pi} = \\ &= 1 - 0.25 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} - j \sin \frac{3\pi}{2} \right) - 1.5 \cdot (\cos 3\pi - j \sin 3\pi) - \\ &- 0.25 \cdot \left(\cos \frac{9\pi}{2} - j \sin \frac{9\pi}{2} \right) + 1 \cdot (\cos 6\pi - j \sin 6\pi) = \\ &= 1 - 0.25 \cdot (0 - j \cdot (-1)) - 1.5 \cdot ((-1) - j \cdot 0) - 0.25 \cdot (0 - j \cdot 1) + 1 \cdot (1 - j \cdot 0) = \\ &= 1 - 0.25j + 1.5 + 0.25j + 1 = 3.5 \end{aligned}$$

$$Y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = T \cdot Y_D(3w_0) = 0.5 \cdot 3.5 = 1.75$$



Slika 8.1: Časovni potek signala $x(t)$ vzorčen s časovnim razmakom $t_0 = 0.25$.

2. Za spodaj podani energijski signal $x(t)$ ocenite spekter amplitudne gostote in vrednost faznega spektra z diskretno Fourierjevo transformacijo pri krožni frekvenci $w = \pi$, pri čemer predpostavite, da je signal vzorčen s časovnim razmakom $t_0 = 0.25$.

Na osnovi Slike 8.1 zapišemo vrednosti signala $x(t)$, kjer je ta različen od 0:

$$x(nt_0) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 1, & n = 3 \\ -1, & n = 4 \\ -1, & n = 5 \\ -1, & n = 6 \\ -1, & n = 7 \end{cases}$$

Ker je signal diskreten, bomo za oceno njegovega sprektora uporabili diskretno Fourierjevo transformacijo (enačba (8.1)):

$$N = 8, \mathbf{w}_0 = \frac{2\pi}{N \cdot t_0} = \frac{2\pi}{8 \cdot 0.25} = \pi, w = \pi = k \cdot w_0 \Rightarrow \mathbf{k} = 1, \mathbf{w}_0 \mathbf{t}_0 \mathbf{k} = \frac{\pi}{4}$$

$$X_D(kw_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nt_0) \cdot e^{-jnw_0t_0k}$$

$$X_D(\pi) = X_D(1 \cdot w_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nt_0) \cdot e^{-jnw_0t_0k}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot e^0 + 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} + 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + 1 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}} - 1 \cdot e^{-j\pi} - 1 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{4}} - 1 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} - 1 \cdot e^{-j\frac{7\pi}{4}} = \\ &= 1 + \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} + \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - j \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} + \cos \frac{3\pi}{4} - j \sin \frac{3\pi}{4} - \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + j \underbrace{\sin \pi}_{=0} - \\ &\quad - \cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4} - \underbrace{\cos \frac{3\pi}{2}}_{=0} + j \underbrace{\sin \frac{3\pi}{2}}_{=-1} - \cos \frac{7\pi}{4} + j \sin \frac{7\pi}{4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} - j - \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} - j - \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} = \\
&= 2 - j \cdot (2 + 2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

V skladu z enačbo (8.2):

$$\begin{aligned}
X(\pi) &\approx t_0 \cdot X_D(\pi) \Rightarrow \\
X(\pi) &= 0.25 \cdot (2 - j \cdot (2 + 2\sqrt{2})) = 0.5 - j \cdot (0.5 + 0.5 \cdot \sqrt{2})
\end{aligned}$$

$$|X(\pi)| = \sqrt{0.5^2 + (0.5 + 0.5 \cdot \sqrt{2})^2} \approx 1.307$$

$$\theta_D(\pi) = \arctg \frac{-0.5 - 0.25 \cdot \sqrt{2}}{0.5} \approx -1.041 \text{ rad}$$

3. Podani sta diskretni Fourierjevi transformaciji vhodnega in izhodnega signala danega linearne stacionarnega sistema

$$\{V_D(kw_0)\} = \{2, 1 + j, 1, 1 - j\}$$

$$\{Y_D(kw_0)\} = \{2, 2j, 1, -2j\}$$

Pri pridobivanju obeh transformacij sta bila vhodni in izhodni signal vzorčena s časovnim korakom $t_0 = 0.25$. Določite približne vrednosti diskretne Fourierjeve transformacije odziva sistema na enotin impulz. Določite še približno vrednost časovnega odziva tega sistema na enotin impulz v času $t = 1$.

S pomočjo enačbe (8.2) bomo najprej določili oceno spektrov $V(w)$ in $Y(w)$ v frekvenčnem prostoru:

$$\begin{aligned}
\{V(w)\} &\doteq t_0 \cdot V_D(kw_0) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1+j}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1-j}{4} \right\} \\
\{Y(w)\} &\doteq t_0 \cdot Y_D(kw_0) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{j}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{j}{2} \right\}
\end{aligned}$$

Za linearne stacionarne sisteme v frekvenčnem prostoru velja zveza $Y(w) = H(w) \cdot V(w)$. Posledično

$$\{H(w)\} = \frac{\{Y(w)\}}{\{V(w)\}} = \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{j}{2}}{\frac{1+j}{4}}, \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}, \frac{-\frac{j}{2}}{\frac{1-j}{4}} \right\} = \{1, 1 + j, 1, 1 - j\}$$

Diskretni spekter odziva sistema na enotin impulz je:

$$\{H_D(kw_0)\} = \frac{H(w)}{t_0} = 4 \cdot H(w) = \{4, 4 + 4j, 4, 4 - 4j\}$$

S pomočjo inverzne diskretne Fourierjeve transformacije (enačba (8.3)) izračunamo funkcijo $h(nt_0)$:

$$\mathbf{N} = 4, \mathbf{w_0} = \frac{2\pi}{N \cdot t_0} = \frac{2\pi}{4 \cdot 0.25} = 2\pi, t = n \cdot t_0 = 1 \Rightarrow \mathbf{n} = 4, \mathbf{nw_0t_0} = 2\pi$$

$$h(nt_0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_D(kw_0) \cdot e^{jn w_0 k t_0}$$

Določimo še približno vrednost funkcije $h(nt_0)$ v času $t = 1$:

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{1}{4} (4 \cdot e^0 + (4 + 4j) \cdot e^{j2\pi} + 4 \cdot e^{j4\pi} + (4 - 4j) \cdot e^{j6\pi}) = \\ &= \frac{1}{4} (4 + (4 + 4j) \cdot \underbrace{(\cos 2\pi + j \sin 2\pi)}_{=1} + 4 \cdot \underbrace{(\cos 4\pi + j \sin 4\pi)}_{=1} + (4 - 4j) \cdot \underbrace{(\cos 6\pi + j \sin 6\pi)}_{=1}) = \\ &= \frac{1}{4} (4 + 4 + 4j + 4 + 4 - 4j) = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4 \end{aligned}$$

Dodatek A

A.1 Integriranje signalov

V teoriji o obdelavi signalov se velikokrat poslužimo integriranja, ki nam pomaga izpeljati neko veličino kot sta energija in moč signala. Kadar je signal definiran s funkcijo $f(t)$, ki podaja njegove vrednosti na celotnem časovnem intervalu integriranja (t_1, t_2) , je njegov določeni integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = g(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = g(t_2) - g(t_1) \quad (\text{A.1})$$

Primer:

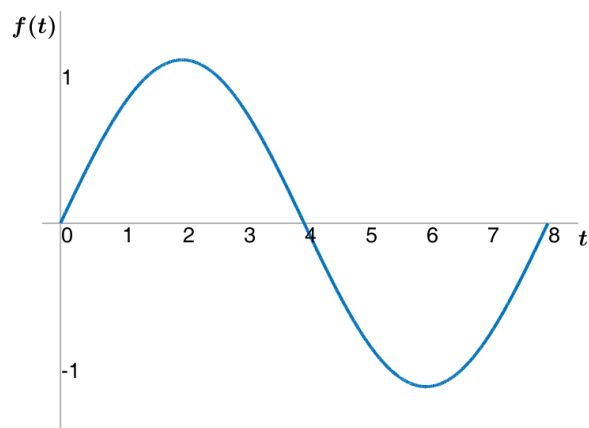
Dan je signal $f(t) = \sin \frac{\pi}{4}t$ (Slika A.1). Izračunajmo moč danega signala po definiciji za periodične signale

$$P_f = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |f(t)|^2 dt,$$

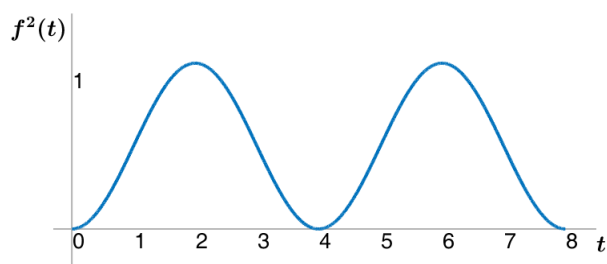
kjer je T perioda signala.

V skladu s formulo (A.1), signal $f(t)$ najprej kvadriramo (Slika A.2), nato pa izberemo $t_1 = 0$ in izračunamo periodo signala $T = 8$. Tako definirani določeni integral $\int_0^8 \sin^2 \frac{\pi}{4}t dt$ rezultira v ploščino pod krivuljo na časovnem intervalu $(0, 8)$ (Slika A.3). Za določitev moči signala ploščino delimo s periodo T :

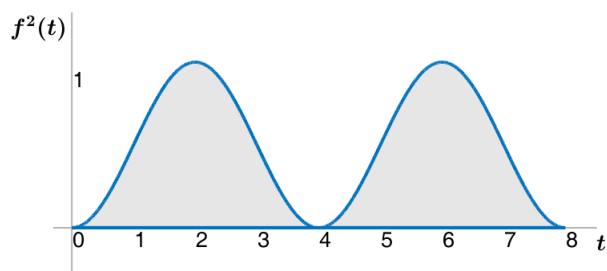
$$\frac{1}{8} \int_0^8 \sin^2 \frac{\pi}{4}t dt = \frac{1}{8} \left(\frac{t}{2} \Big|_0^8 - \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{2}t \right) \Big|_0^8 \right) = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$



Slika A.1: Grafični prikaz signala $f(t) = \sin \frac{\pi}{4}t$ na časovnem intervalu $(0, 8)$. Perioda signala je $T = 8$.



Slika A.2: Grafični prikaz kvadrata signala $f(t) = \sin \frac{\pi}{4}t$ na časovnem intervalu $(0, 8)$.



Slika A.3: Določeni integral $\int_0^8 \sin^2 \frac{\pi}{4}t \, dt$ rezultira v ploščino pod krivuljo funkcije $\sin^2 \frac{\pi}{4}t$.

A.2 Numerično integriranje signalov

Pri analizi signalov imamo večkrat opravke z signali, ki so bili digitalizirani - vzorčeni po času in kvantizirani po amplitudi. Primitivne funkcije signala v takšnih primerih ne znamo določiti, lahko pa integrand $f(t)$ zamenjamo s približkom $h(t)$. Pri izračunu približka uporabimo vrednosti integranda v izbranih delilnih točkah (v vzorčnih točkah nt_0 , kjer je t_0 časovni korak vzorčenja). Pri nekaterih metodah se uporabljajo tudi vrednosti njihovih odvodov. V nadaljevanju je nekaj metod za določitev približka:

- pravokotniška metoda (Slika A.4.a) - signal nadomestimo z aproksimacijo, katere vrednosti med časom nt_0 in $(n+1)t_0$ so konstantne (enake $h(nt_0)$). Integral pod krivuljo je vsota ploščin vseh pravokotnikov:

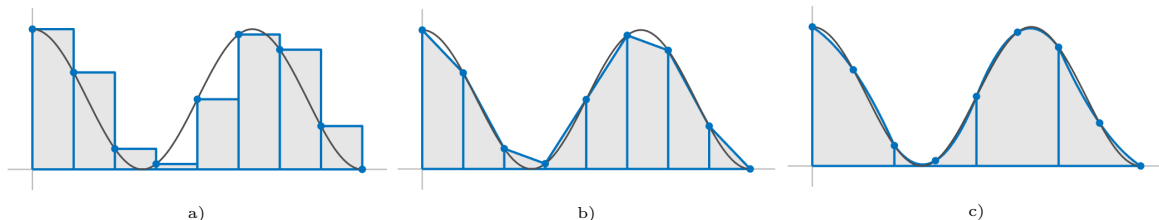
$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} h(nt_0) \cdot t_0$$

- metoda trapezov (Slika A.4.b) - signal aproksimiramo z odsekoma linearno funkcijo. V ta namen uporabimo linearno interpolacijo skozi sosednji točki $h(nt_0) = h((n+1)t_0)$. Integral pod krivuljo je vsota ploščin vseh trapezov:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h(nt_0) + h((n+1)t_0)}{2} \cdot t_0$$

- Simpsonova metoda (Slika A.4.c) - signal aproksimiramo s kvadratnimi funkcijami. Vsaka kvadratna funkcija (parabola) gre skozi tri zaporedne točke, pri čemer je število točk N sodo. Integral je vsota $\frac{N}{2}$ ploščin pod parabolami:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \approx \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{h(2nt_0) + 4h((2n+1)t_0) + h((2n+2)t_0)}{3} \cdot \frac{t_0}{2}$$



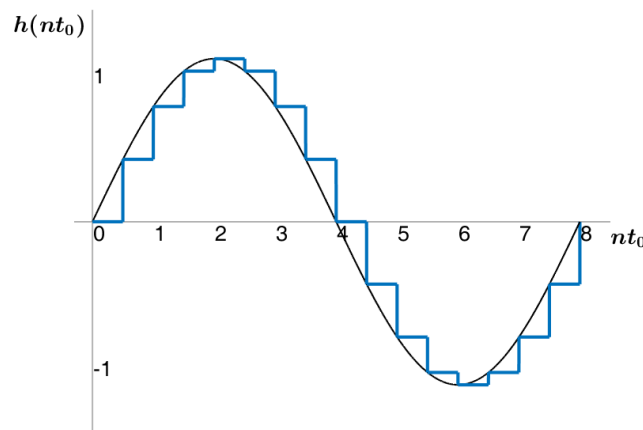
Slika A.4: Prikaz različnih metod za aproksimacijo signalov: a) pravokotna metoda, b) metoda trapezov, c) Simpsonova metoda.

Primer:

Izračunajmo moč signala $h(t) = \sin \frac{\pi}{4} nt_0$ (Slika A.5) z uporabo pravokotniške metode numeričnega integriranja, po definiciji za periodične signale

$$P_f = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |f(t)|^2 dt \approx \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} |h(nt_0)|^2 \cdot t_0$$

kjer je T perioda signala, $t_0 = 0.5$ časovni korak vzorčenja, $N = \frac{T}{t_0} + 1 = 17$ pa število ekvidistančnih točk na časovnem intervalu $[t_1, t_1 + T]$.



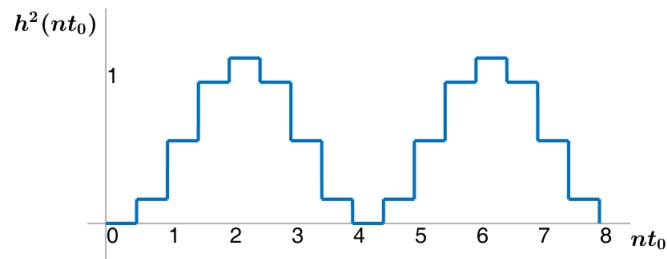
Slika A.5: Grafični prikaz digitalnega signala $h(t) = \sin \frac{\pi}{4} nt_0$ na časovnem intervalu $(0, 8)$. Časovni korak vzorčenja je $t_0 = 0.5$, perioda signala pa $T = 8$.

Vzorčeni signal $h(nt_0)$ najprej kvadriramo (Slika A.6), nato pa za vsak $n \in [0, N-1]$, $n \in \mathbb{Z}$ določimo ploščino ustreznega pravokotnika (Slika A.7). Moč signala bo vsota vseh ploščin pravokotnikov, deljeno s periodo T :

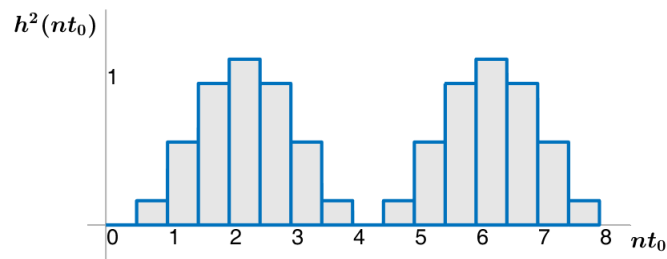
$$P_f = \frac{1}{8} \int_1^8 \sin^2 \frac{\pi}{4} t dt \approx \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{16} h(n \cdot 0.5)^2 \cdot 0.5 = \frac{1}{8} (0 \cdot 0.5 + 0.15 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5 + \dots + 0.15 \cdot 0.5) = \frac{1}{2}$$

V nadaljevanju si pogledjmo še rešitev danega primera v programskem okolju MATLAB. Za začetek, bomo definirali časovni vektor t , ki zajame časovni interval $(0, 8)$, s korakom povečevanja t_0 in funkcijo $h(nt_0)$. Nato zakodiramo še formulo za izračun moči.

```
t0=0.5; % definicija casovnega koraka vzorcenja
T=8; % perioda signala
t=0:t0:T-t0; % casovni vektor
ht=sin(pi/4*t); % definicija signala
figure();
plot(t,ht) % izris graficnega prikaza digitalnega signala ht
```



Slika A.6: Grafični prikaz kvadrata vzorčenega signala $h(nt_0)$ na časovnem intervalu $(0, 8)$.



Slika A.7: Numerični integral $\sum_{n=0}^{N-1} |h(nt_0)|^2 \cdot t_0$ rezultira v seštevek ploščin vseh pravokotnikov, ki jih določimo z vzorčnimi točkami na časovnem intervalu $(0, Nt_0)$, kjer je t_0 časovni korak vzorčenja.

```

xlabel('nt_0') % oznaka x osi
ylabel('h(nt_0)') % oznaka y osi

% Izracun moci signala ht z uporabo operanda .^
% (.^2 izracuna kvadrat vsakega elementa matrike ht, rezultat je matrika enake velikosti.) :
P=1/T*sum(ht.^2)*t0;
% Izracun moci signala ht s for zanko (z indeksiranjem elementov matrike ht):
P=0;
for t=0:t0:T-t0
    P=P+1/T*sin(pi/4*t)^2*t0;
end

```


Dodatek B

B.1 Tabela Fourierjevih transformacij nekaterih funkcij

$\mathbf{f(t)}$	$\mathcal{F}[\mathbf{f(t)}]$
$af(t) + bg(t)$	$aF(w) + bG(w)$
$\overline{f(t)}$	$\overline{F(-w)}$
$f(at)$	$\frac{1}{ a }F\left(\frac{w}{a}\right)$
$f(t \pm t_0)$	$F(w) e^{\pm jw t_0}$
$f(t)e^{jw_0 t}$	$F(w - w_0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(jw)^n F(w)$
$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F(w)}{dw^n}$
$\int_{-\infty}^t f(u) du$	$\frac{1}{jw} F(w)$
$f_i(t) * f_j(t)$	$F_i(w) F_j(w)$
$f_i(t) \cdot f_j(t)$	$\frac{1}{2\pi} (F_i(w) * F_j(w))$
$F(t)$	$2\pi \cdot f(-w)$
$\delta(t)$	1
$a\delta(t)$	a
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm jw t_0}$
1	$2\pi \cdot \delta(w)$
a	$2\pi a \cdot \delta(w)$
$e^{\pm jw_0 t}$	$2\pi \cdot \delta(w \mp w_0)$
$\cos w_0 t$	$\pi \cdot (\delta(w + w_0) + \delta(w - w_0))$
$\sin w_0 t$	$j\pi \cdot (\delta(w + w_0) - \delta(w - w_0))$
$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{jw}$
$u(t)$	$\pi \cdot \delta(w) + \frac{1}{jw}$